UNTERSUCHUNG DER BRENNPUNKTSKURVE EINES KEGELSCHNITTBÜSCHELS

MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DER GESTALTLICHEN VERHÄLTNISSE.

VON DER KÖNIGL. TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU MÜNCHEN ZUR ERLANGUNG DER WÜRDE EINES DOKTORS DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN GENEHMIGTE DISSERTATION.

VERFASZT VON

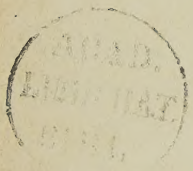
STANISLAUS HALLER

AUS MÜNCHEN.

REFERENT: Prof. Dr. ANTON von BRAUNMÜHL.

KORREFERENT: Prof. Dr. SEB. FINSTERWALDER.

TAG DER MÜNDLICHEN PRÜFUNG: 22. FEBRUAR 1902.



DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1903.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555418_0079

Einleitung.

Ein Kegelschnitt ist bekanntlich durch Angabe von fünf Elementen — Punkten oder Tangenten —, von denen keine drei gleichartige einem Grundgebilde erster Stufe angehören, ein- oder auch mehrdeutig bestimmt. Es wird daher durch Angabe von nur vier Elementen — i Punkten und k Tangenten $(i + k = 4)$ — eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Kegelschnitten, oder ein ganzes System solcher Kurven definiert sein, das wir symbolisch, wie a. a. O.[1]) mit $S(ip, kl)$ bezeichnen wollen. In einem jeden Kegelschnitt spielt aber der Brennpunkt die Rolle eines *zweiwertigen* Bestimmungsstückes, woraus sich ergibt, daß die sämtlichen Brennpunkte der Individuen eines derart festgelegten Kegelschnittsystems eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Punkten erfüllen, die wir als die Brennpunktskurve desselben ansprechen. Solcher Systeme einfachster Art gibt es bekanntlich fünf:

$S(0p, 4l)$ die Schar von Kegelschnitten,
$S(4p, 0l)$ das Büschel von Kegelschnitten,
$S(1p, 3l)$ die gemischte Schar von Kegelschnitten,
$S(3p, 1l)$ das gemischte Büschel von Kegelschnitten,
$S(2p, 2l)$ die Büschelschar von Kegelschnitten.[2])

Die diesen Mannigfaltigkeiten von Linien 2. Ordnung zugewiesenen Brennpunktskurven sind bis jetzt nur wenig untersucht worden. Voll-

---

1) „Jakob Steiners Vorlesungen über synthetische Geometrie". Bd. II. Herausgeg. von Schröter.

2) Die drei letzten Systeme werden in dem eben zitierten Werke als gemischte Scharen bezeichnet.

Zimmermann: „Über das gemischte Kegelschnittbüschel" in Schlömilchs Zeitschrift Bd. 29, bezeichnet das System $S(3p, 1l)$ als gemischtes Büschel, so daß sich für $S(2p, 2l)$ die vom Verfasser gewählte Benennung von selbst empfiehlt.

ständig behandelt ist die Brennpunktskurve der Schar[1]), während vom Büschel außer der Gleichung jener Ortskurve an mehreren Stellen[2]) einzelne Eigenschaften veröffentlicht worden sind. Zu den übrigen drei Systemen liegen unseres Wissens Untersuchungen allgemeiner Fälle nach der bezeichneten Richtung nicht vor.[3])

Schon längere Zeit beschäftigt sich Verfasser mit eingehenden Studien über die Brennpunktskurven eines Kegelschnittbüschels und auch des gemischten Büschels, wobei vornehmlich auf die Ergründung der gestaltlichen Verhältnisse Bedacht genommen wurde. In dieser Arbeit nun sollen die hierbei gewonnenen Ergebnisse nur insoweit Raum finden, als sie sich auf die Brennpunkte eines gewöhnlichen Kegelschnittbüschels mit vier reellen Grundpunkten beziehen.

§ 1. Die implizite Gleichung der Brennpunktskurve eines Büschels nach Möbius.

In der zyklofokalen Theorie der Kegelschnitte[4]) werden diese Kurven definiert als der geometrische Ort für die Mittelpunkte sämtlicher Kreise, die alle durch einen festen Punkt F gehend, einen um einen anderen gegebenen Punkt F_1 als Mittelpunkt beschriebenen Kreis L, den Leitkreis, berühren. Je nachdem F innerhalb oder außerhalb des Kreises L liegt, gelangt man bei dieser Definition der Kegelschnitte zur Ellipse oder Hyperbel. Geht der Leitkreis in eine Leitgerade über, so ergibt sich bekanntlich die Parabel.

Um die analytische Gleichung der Bpk. eines Büschels von Kegelschnitten zu erhalten, dessen vier Grundpunkten P_i in einem ge-

---

1) Durège: „Über die Kurve dritter Ordnung, welche den geometrischen Ort der Brennpunkte einer Kegelschnittschar bildet“ in Mathem. Annalen, Bd. 5. pag. 83—94.

2) „Aug. Ferd. Möbius, Gesammelte Werke“, herausgeg. von R. Baltzer, Bd. I. pag. 587.

Salmon-Fiedler: „Analytische Geometrie der Kegelschnitte“ Bd. II. 5. Aufl. pag. 535 und 520.

Auf Bobeks Aufsatz in den Monatsheften für Mathematik und Physik, 1892 (pag. 309—317) wurde ich leider erst während der Druckrevision dieser Dissertation aufmerksam gemacht.

3) Hoffmann: Zeitschrift für Math. und naturwissenschaftl. Unterricht, Bd. 13. pag. 200. Der behandelte Fall ist kein spezieller des Büschels.

Cayley: The Collected Mathematical Papers. Vol. 8. pag. 568.

4) Vergleiche hierüber z. B. C. F. Geiser: Jakob Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie. Die Kegelschnitte in elementarer Darstellung. Leipzig 1887. B. G. Teubner. pag. 208.

wöhnlichen rechtwinkligen kartesischen System YOX die Koordinaten x_i und y_i zukommen, fassen wir irgend einen Büschelkegelschnitt mit den reellen Brennpunkten F und F_1 ins Auge und nehmen die P_i zu Mittelpunkten von Kreisen K_i, deren Peripherien durch F gehen. Seien die Koordinaten von F im Systeme YOX mit ξ und η bezeichnet, so werden die Radien der beschriebenen Kreise $\varrho_i = \sqrt{(\xi - x_i)^2 + (\eta - y_i)^2}$ und ihre Gleichungen:

$$K_i \equiv (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - \varrho_i^2 = 0.$$

Nach dem oben zitierten Satze muß nunmehr ein Kreis L existieren, der die vier Kreise K_i berührt. Dem Kreise L sind somit vier Bedingungen auferlegt, welcher Umstand eine gewisse Abhängigkeit zwischen ξ und η bedingt, deren analytischer Ausdruck uns die gesuchte Gleichung der Bpk. des vorgegebenen Büschels liefert.

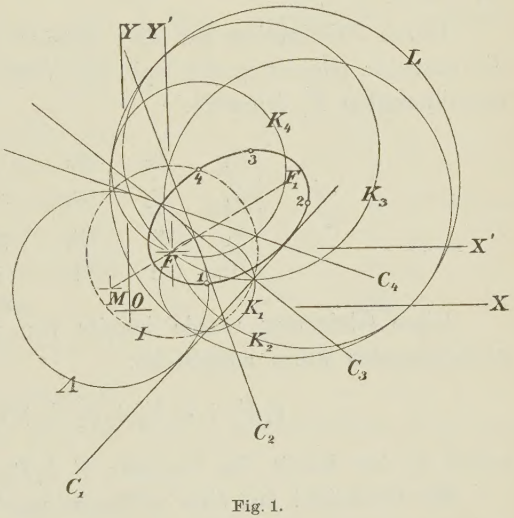


Fig. 1.

Um diesen zu finden, führen wir ein zu dem bereits vorhandenen parallel gelegenes Koordinatensystem $Y'FX'$ ein, dessen Anfangspunkt in F liegt. In Bezug auf dieses lauten die Gleichungen der 4 K_i:

$$K_i \equiv x'^2 + y'^2 - 2x'(x_i - \xi) - 2y'(y_i - \eta) = 0.$$

Durch Transformation vermittels reziproker Radien, für welche F als Inversionszentrum, die willkürliche Größe $2\varrho^2$ als Inversionspotenz gewählt werden, treten an die Stelle der 4 Kreise K_i vier Geraden C_i, die offenbar mit den Chordalen der Kreise K_i mit dem Inversionskreis I zusammenfallen.

Da die Gleichung von I $x'^2 + y'^2 - 2\varrho^2 = 0$ lautet, erhält man als die von C_i

$$C_i \equiv I - K_i \equiv x'(x_i - \xi) + y'(y_i - \eta) - \varrho^2 = 0,$$

welche auf die Hessesche Normalform gebracht lautet:

$$C_i \equiv 0 = \frac{x'(x_i - \xi) + y'(y_i - \eta) - \varrho^2}{\varrho_i}.$$

Da nun vor der Transformation die vier Kreise K_i einen fünften Kreis L berührten, so müssen nach bekannten Eigenschaften auch die an ihre Stelle getretenen vier Geraden C_i einen bestimmten Kreis A berühren. Hat letzterer den Radius Z und als Mittelpunktskoordinaten X und Y (in Bezug auf das System $Y'FX'$), so muß offenbar sein Mittelpunkt (X, Y) von den vier Geraden C_i ein und dieselbe Entfernung Z besitzen. D. h.: Es bestehen nebeneinander die vier Gleichungen:

$$Z = \frac{X(x_i - \xi) + Y(y_i - \eta) - \varrho^2}{\varrho_i},$$

oder:

$$X(x_i - \xi) + Y(y_i - \eta) - Z\varrho_i - \varrho^2 = 0$$

für $i = 1, 2, 3, 4$.

Durch Elimination der drei Größen X, Y und Z ergibt sich als die gesuchte Gleichung der Bpk. des vorgelegten Büschels mit den vier Grundpunkten P_i folgende:

$$\begin{vmatrix} \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 & \varrho_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung wurde bereits von Möbius a. d. f. a. O. in der nachstehenden Form aufgestellt:

$$\varrho_1 F_1 + \varrho_2 F_2 + \varrho_3 F_3 + \varrho_4 F_4 = 0,$$

wobei F_i den Inhalt des Dreiecks $P_k P_l P_m$ bedeutet.

Mit Rücksicht auf eine später zu machende Anwendung heben wir gleich jetzt folgenden Satz hervor:

Bezeichnet α den Neigungswinkel der reellen Achse des durch die Brennpunktskoordinaten ξ und η bestimmten Kegelschnittes gegen die X Achse, so ergibt sich, wie unmittelbar aus der Figur zu ersehen ist:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{Y}{X} = \frac{\begin{vmatrix} \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}},$$

indem man von den obigen vier Gleichungen nur 3 zur Berechnung von Y und X verwendet.

Die so gefundene *implizite* Gleichung der Bpk. eines Kegelschnittbüschels eignet sich jedoch nur wenig zur Untersuchung ihrer gestaltlichen Verhältnisse. Gleichwohl kann man aus ihr einige Eigenschaften derselben und auch für einige spezielle Fälle von Büscheln bequemere Gleichungsformem ableiten, die zur Untersuchung des Verlaufes der Brennpunktskurve geeignet sind, wie dies im Nachfolgenden an zwei Beispielen gezeigt werden soll.

Beispiel 1. Von den vier Grundpunkten des Büschels liegen drei in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks, der vierte in seinem Schwerpunkt:

Koordinaten: $x_1 = 0;$ | $x_2 = 1$ | $x_3 = 1$ | $x_4 = -2$

$y_1 = 0;$ | $y_2 = \sqrt{3}$ | $y_3 = -\sqrt{3}$ | $y_4 = 0.$

Die Gleichung der Bpk. des dadurch festgelegten regulären Büschels gleichseitiger Hyperbeln wird: $\varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4 = 3\varrho_1$. Durch Einführung von Polarkoordinaten, deren nähere Bestimmung sich unmittelbar aus der Figur 2 ergibt, erhält man nach ziemlich langwieriger Rechnung folgende zur Verzeichnung der Bpk. geeignete Gleichung:

$$4\varrho^6 + 4\varrho^5 \cos 3\varphi - 15\varrho^4 + 8\varrho^2 - 1 = 0.$$

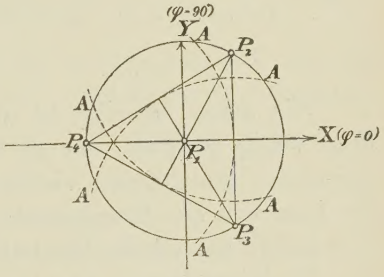


Fig. 2.

Dem fügen wir noch folgendes bei:

Der dem gleichseitigen Dreieck $P_2P_3P_4$ umschriebene Kreis vom Radius 2 hat die Gleichung:

$$\varrho_2 = \varrho_3 + \varrho_4.$$ [1])

Sein Schnitt mit der Bpk. wird daher charakterisiert durch die Beziehung:

$$2\varrho_2 = 3\varrho_1 = 6 \quad \text{oder:} \quad \varrho_2 = 3 = h = \text{Dreieckshöhe.}$$

D. h. Auf der Bpk. liegen diejenigen Punkte A, die von den Eckpunkten des gleichseitigen Dreiecks um seine Höhenlänge abstehen und gleichzeitig seinem Umkreis angehören.

Die Gestalt dieser Kurve findet sich in Figur 9.

---

1) Ein Satz aus der elem. Geometrie lautet:

Ist einem gleichseitigen Dreieck ein Kreis umschrieben, so besitzt jeder Punkt seiner Peripherie von den Ecken des Dreiecks Abstände von der Art, daß der größte gleich ist der Summe der beiden kleineren.

Beispiel 2. Die vier Grundpunkte liegen in den Ecken eines Parallelogramms, dessen Diagonalen [$2m$ und $2n$] den Winkel 2α einschließen.

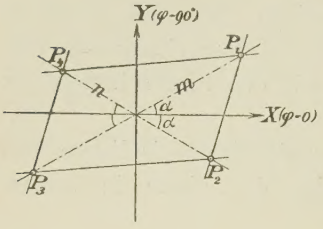


Fig. 3.

Koordinaten:

$$x_1 = mc \quad | \quad x_2 = nc$$
$$y_1 = ms \quad | \quad y_2 = -ns$$
$$x_3 = -mc \quad | \quad x_4 = -nc$$
$$y_3 = -ms \quad | \quad y_4 = ns$$

(für $\sin\alpha = s$ und $\cos\alpha = c$).

Die Gleichung der dadurch bestimmten Bpk. eines Büschels *konzentrischer* Kegelschnitte lautet:

$$\varrho_1 + \varrho_3 = \varrho_2 + \varrho_4.$$

Durch Einführung von Polarkoordinaten (siehe Figur 3) ergibt sich folgende zur Verzeichnung der Kurve brauchbare Gleichung der Bpk.:

$$\varrho^2 = \frac{m^2 n^2 (m^2 - n^2)(\cos^2(\varphi + \alpha) - \cos^2(\varphi - \alpha))}{(n^2\cos^2(\varphi + \alpha) - m^2\cos^2(\varphi - \alpha))(n^2\sin^2(\varphi + \alpha) - m^2\sin^2(\varphi - \alpha))}.$$

Wie schon bemerkt, ist die von Möbius angegebene Gleichungsform wenig geeignet, um an ihrer Hand die uns hier speziell interessierenden gestaltlichen Verhältnisse und deren Modifikationen je nach der Lage der vier Grundpunkte zu studieren. Deshalb suchen wir uns eine andere analytische Darstellung der Bpk. zu verschaffen, indem wir ihre Punktkoordinaten als irrationale Funktionen eines Parameters λ darstellen.

§ 2. Darstellung der Koordinaten eines Punktes der Bpk. als irrationale Funktionen eines Parameters.

Wir stellen uns die Aufgabe:

Für den allgemeinen Kegelschnitt (K)

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

sind die Koordinaten ξ und η seiner Brennpunkte als Funktionen der Koeffizienten a_{ik} aufzustellen.

Es ist

$$\xi = x_0 \pm c\cos\alpha$$
$$\eta = y_0 \pm c\sin\alpha,$$

wenn (x_0, y_0) die Mittelpunktskoordinaten von K, c seine halbe lineare Exzentrizität und endlich α die Neigung seiner reellen Achse gegen X bedeutet.

Bezeichnen ferner, wie gewöhnlich, die A_{ik} die Unterdeterminanten der aus den Koeffizienten a_{ik} obiger Gleichung gebildeten Determinante D, so ergeben sich alle notwendigen Größen in folgender Weise:

a) $$x_0 = \frac{A_{13}}{A_{33}}, \qquad y_0 = -\frac{A_{23}}{A_{33}}.$$

b) Aus der bekannten Relation:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\,a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$$

ergeben sich:

$$\sin\alpha = \frac{a_{22} - a_{11} + \sqrt{R}}{\sqrt{2R + 2(a_{22} - a_{11})\sqrt{R}}}$$

und

$$\cos\alpha = \frac{2\,a_{12}}{\sqrt{2R + 2(a_{22} - a_{11})\sqrt{R}}},$$

wobei

$$R = (a_{11} - a_{22})^2 + 4\,a_{12}^2.$$

c) Zur Berechnung von c erinnern wir an den Umstand, daß die auf die Hauptachsen des Kegelschnittes transformierte Gleichung $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{A_{33}}{D} = 0$ lautet, wenn λ_1 und λ_2 die Wurzeln der folgenden quadratischen Gleichung sind:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Die Halbachsenlängen des Kegelschnitts sind somit:

$$a = \sqrt{-\frac{D}{\lambda_1 A_{33}}} \quad \text{und} \quad b = \sqrt{-\frac{D}{\lambda_2 A_{33}}},$$

woraus

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{D}{\lambda_1 \lambda_2 A_{33}} \cdot (\lambda_1 - \lambda_2).$$

Daraus ergibt sich:

$$c = \frac{\sqrt{D \cdot \sqrt{R}}}{A_{33}}.$$

Trägt man nunmehr die so gefundenen Werte oben ein, so erhält man nach einigen Umformungen die Koordinaten der Brennpunkte für den vorgelegten Kegelschnitt in folgender Form:

$$\xi = \frac{A_{13} \pm \sqrt{\frac{D}{2}(\sqrt{R} + a_{11} - a_{22})}}{A_{33}}, \qquad \eta = \frac{-A_{23} \pm \sqrt{\frac{D}{2}(\sqrt{R} - a_{11} + a_{22})}}{A_{33}}.$$

(Vergl. Salmon-Fiedler: Kegelschnitte. II. pag. 519.)

Bei der numerischen Berechnung der Brennpunkte des gegebenen Kegelschnitts hat man, da R als die Summe zweier Quadrate — die a_{ik} reell vorausgesetzt — stets positiv und größer ist, als der absolute Wert von $(a_{11} - a_{22})$, der Größe $\sqrt{R}$ das Vorzeichen der Determinante D zu geben, damit das Hauptradikal reell werde. Würde man $\sqrt{R}$ mit dem entgegengesetzten Zeichen von D belasten, so ergäben sich dadurch die imaginären Brennpunkte des Kegelschnitts.

Nimmt man nun statt des einzelnen Kegelschnitts ein ganzes Büschel:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + \cdots + \lambda(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + \cdots) = 0,$$

so berechnen sich die Koordinaten der Brennpunkte des durch die gewählte Größe λ charakterisierten Individuums im Büschel als Funktionen dieses Parameters.

An die Stelle der früheren Größen D, R, A_{13}, A_{23}, A_{33} und $(a_{11} - a_{22})$ treten jetzt Funktionen von λ und zwar werden im allgemeinsten Falle die Größen:

D vom 3. Grade in λ
R, A_{12}, A_{23}, A_{33} „ 2. „ „ λ
$a_{11} - a_{22}$ „ 1. „ „ λ.

Im übrigen lassen sich durch Einführung geeigneter Grundkegelschnitte die obigen Funktionen des Parameters λ sehr verschieden gestalten.

Beispiel 1: Nimmt man als ersten Grundkegelschnitt einen beliebigen des Büschels und als zweiten die darin im allgemeinen immer vorkommende gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten als Koordinatenachsen gewählt werden mögen, dann wird die Büschelgleichung:

$$0 = (a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + \cdots) + 2\lambda\left(xy - \frac{\varkappa^2}{2}\right)$$

und hieraus:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + \lambda & a_{13} \\ a_{12} + \lambda & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda\varkappa^2 \end{vmatrix}.$$

Daraus erkennt man unmittelbar:

D wird Funktion vom 3. Grade in λ
R und A_{33} sind Funktionen „ 2. „ „ λ
A_{13}, A_{33} „ „ „ 1. „ „ λ
und $a_{11} - a_{22}$ ist vom 0. Grade in λ.

Beispiel 2: Der Grad von D läßt sich gleichzeitig um 1 erniedrigen, wenn der Kegelschnitt $(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + \cdots) = 0$ in ein Geradenpaar degeneriert, in welchem Falle einer der Nullpunkte der Funktion D *in das Unendliche verlegt* erscheint. Dies ist der Grund für die Erniedrigung der Ordnung von D.

Bevor wir auf die Diskussion der Bpk. eines Kegelschnittbüschels näher eingehen, wollen wir der oben gewonnenen Darstellung durch Einführung eines neuen Parameters u eine andere Form erteilen, *die uns die Bpk. als eine hyperelliptische Kurve vom Geschlechte Zwei erkennen läßt.*

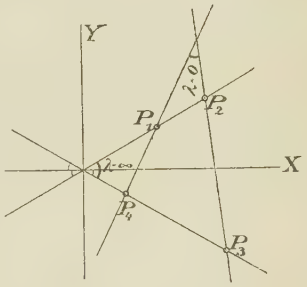


Fig. 4.

Zu dem Ende nehmen wir als Grundkegelschnitte des Büschels zwei Geradenpaare (zerfallende Kegelschnitte), weil dann die algebraischen Umformungen möglichst einfach erscheinen, ohne daß dadurch die Allgemeinheit unserer Betrachtungen beschränkt wird.

Die Büschelgleichung laute (Fig. 4):

$$0 = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} + \lambda(y^2 - \varkappa^2 x^2).$$

Dabei muß sein:

$$D^* = 0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Die Unterdeterminanten dieser Determinante seien in der Folge mit A^*_{ik} bezeichnet, dann wird die Büscheldeterminante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} - \varkappa^2\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} + \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda\cdot(A^*_{22} - \varkappa^2 A^*_{11} - \varkappa^2\lambda a_{33}) = -\lambda\varkappa^2(\lambda a_{33} + c),$$

wobei

$$c = \frac{\varkappa^2 A^*_{11} - A^*_{22}}{\varkappa^2}.$$

Setzt man zur Vereinfachung der folgenden Ausdrücke:

$$a_{11} - a_{22} = a,$$

$$1 + \varkappa^2 = \varrho,$$

und endlich

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = R^*,$$

so ist für das Büschel:

$$R = (a - \lambda\varrho)^2 + 4a_{12}^2.$$

Damit $\sqrt{R}$ eine rationale Funktion eines neuen Parameters u werde, ist zu setzen[1]):

$$\sqrt{(a-\lambda\varrho)^2+4a_{12}^2}=\lambda\varrho+u,$$

woraus:

$$\lambda=\frac{R^*-u^2}{2\varrho\,(a+u)}$$

und:

$$\sqrt{R}=\frac{u^2+2au+R^*}{2(a+u)}.$$

Daraus ergeben sich aber die zur Berechnung von ξ und η notwendigen Ausdrücke:

$$\sqrt{R}+a-\lambda\varrho=a+u$$

$$\sqrt{R}-a+\lambda\varrho=\frac{4\,a_{12}^2}{a+u}.$$

Substituiert man die so gefundenen Werte in die Gleichungen für ξ und η, so erhält man:

$$\xi=\frac{2\varrho(a+u)A_{13}+\varkappa\sqrt{\tfrac{1}{2}(u^2-R^*)\,[a_{33}(R^*-u^2)+2\varrho c(a+u)]\,(a+u)}}{2\varrho(a+u)A_{33}}$$

$$\eta=\frac{-2\varrho(a+u)^2A_{23}+2a_{12}\varkappa\sqrt{\tfrac{1}{2}(u^2-R^*)\,[a_{33}(R^*-u^2)+2\varrho c\,(a+u)]\,(a+u)}}{2\varrho(a+u)^2A_{33}}.$$

Wählt man drei homogene Koordinaten, so wird die analytische Darstellung unserer Bpk. durch folgende drei Gleichungen gegeben:

$$\mu\cdot\xi=\quad 2\varrho(a+u)^2A_{13}+\varkappa(a+u)\sqrt{U}$$

$$\mu\cdot\eta=-2\varrho(a+u)^2A_{23}+2a_{12}\varkappa\cdot\sqrt{U}$$

$$\mu\cdot\xi=\quad 2\varrho(a+u)^2A_{33}.$$

Die ersten Teile in jeder Relation werden augenscheinlich ganze Funktionen der Variablen u, wenn man an die Stelle der in den A_{ik} vorkommenden Größen λ den oben angeführten Wert in der Variablen u setzt.

Da die Funktion U von der Ordnung 5 in u ist, so ist die Bpk. unseres Büschels eine hyperelliptische Kurve vom Geschlechte 2.[2])

§ 3. Diskussion der allgemeinen Kurvengestalt.

An der Hand der in den beiden ersten Paragraphen gewonnenen analytischen Kurvendarstellungen läßt sich nun die Gestalt der Bpk. eines Kegelschnittbüschels diskutieren.

1) Wie bei der Rationalisierung des irrationalen Integrals: $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$.

2) Vergl. etwa: Vorlesungen über Geometrie von Alfred Clebsch. Bearb. und herausgeg. von Dr. Ferdinand Lindemann. Bd. I, pag. 916 ff.

Dabei seien die Grundpunkte des vorgegebenen Büschels als *reell* angenommen, wobei wir jedoch ausdrücklich bemerken, daß namentlich die Darstellung in § 2 sich unmittelbar auch auf Kegelschnittbüschel mit einem oder auch zwei Paaren konjugiert imaginärer Grundpunkte ohne weiteres übertragen läßt.

A. Unendlich ferne Punkte der Bpk.

gewinnen wir offenbar in den beiden unendlich fernen Brennpunkten p und q der zwei in dem Büschel vorkommenden Parabeln, seien nun

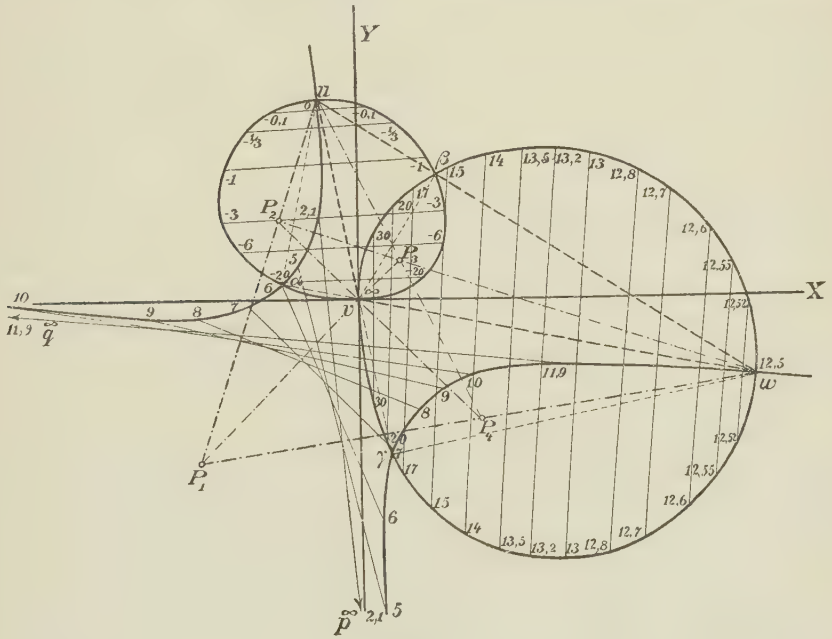


Fig. 5.

diese reell oder imaginär. Die Achsen derselben werden die Asymptoten*richtungen* der Bpk. Je nachdem die vier reellen Grundpunkte des Büschels ein allseitig konvexes Viereck bilden, oder ein solches mit einer einspringenden Ecke, werden die dem Büschel angehörigen Parabeln uud damit die unendlich fernen Punkte der Bpk. samt ihren Asymptotenrichtungen reell oder imaginär. Das Gleiche ergibt sich übrigens auch aus der Forderung $A_{33} = 0$, für welche die zugehörigen Koordinatenwerte ξ und η in das Unendliche wachsen.

Um weitere unendlich ferne Punkte der Bpk. zu finden, führen wir in der Gleichung nach Möbius homogene Koordinaten ein, so daß die unendlich ferne Gerade G^∞ zur dritten Fundamentalgeraden des Koor-

dinatensystems wird mit der Gleichung $z = 0$. D. h. wir setzen statt der Größen

$$x_i, \quad y_i, \quad \xi \text{ und } \eta,$$

die entsprechenden

$$\frac{x_i}{z_i'}, \quad \frac{y_i}{z_i'}, \quad \frac{\xi}{\zeta} \text{ und } \frac{\eta}{\xi}.$$

Dadurch wird die Gleichung der Bpk. folgende:

$$\Phi \equiv 0 = \sum_{i=1}^{i=4} F_i \cdot \varrho_i$$

für

$$F_i = \begin{vmatrix} x_k & x_l & x_m \\ y_k & y_l & x_m \\ z_k & z_l & z_m \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \varrho_i = \sqrt{(\xi z_i - \zeta x_i)^2 + (\eta z_i - \zeta y_i)^2}.$$

Für $\zeta = 0$ folgt: $\Phi \equiv \Sigma F_i \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = 0$, woraus zu entnehmen ist: $\xi^2 + \eta^2 = 0$. D. h.: Die Bpk. enthält als unendlich ferne Punkte die unendlich fernen imaginären Kreispunkte J_1 und J_2, und zwar, wie sich durch Bildung der partiellen Differentialquotienten der Form Φ nach den Variablen ξ, η und ζ ergibt, als Doppelpunkte. *Die Bpk. eines Kegelschnittbüschels ist also eine bizirkulare Kurve.*

Die G^∞ schneidet somit unsere Ortskurve in 6 Punkten, von denen zwei einzelne p und q einfach zählen und reell oder imaginär sein können, während die anderen 4 Punkte zu je zweien mit den unendlich fernen imaginären Kreispunkten J_1 und J_2 zusammenfallen.

Allgemein ergibt sich, wie entweder die Rationalisierung der Form $\Phi = 0$, oder eine synthetische Betrachtung[1]) bequemer zeigt, als Brennpunktskurve eines Kegelschnittbüschels eine bizirkulare Kurve sechster Ordnung vom Geschlechte zwei: Als Kurve sechster Ordnung enthält die Ortskurve höchstens: $\frac{(6-1)(6-2)}{2} = 10$ Doppelpunkte, und da sie, wie bereits gezeigt, vom Geschlechte zwei ist, kann sie nur mehr $(10-2) = 8$ Doppelpunkte besitzen, von denen zwei mit den unendlich fernen imaginären Kreispunkten J_1 und J_2 zusammenfallen. Es sind daher noch weitere sechs Doppelpunkte vorhanden, die bei vier getrennt liegenden, als reell vorausgesetzten Grundpunkten auch reell sind, wie nun gezeigt werden soll.

1) Salmon-Fiedler, „Kegelschnitte". Bd. II, pag. 520, Aufg. 8. Ursprünglich zu finden bei H. Faure, Nouvelles Annales 1861, pag. 56.

B. Die sechs reellen Doppelpunkte der Bpk.

Doppelpunkte der Ortskurve folgen aus der Darstellung auf Seite 9 durch die Forderung des gleichzeitigen Verschwindens der beiden Radikale: $\sqrt{\frac{D}{2}(\sqrt{R} \pm (a_{11} - a_{22}))}$. Im allgemeinen kann dieser Doppelausdruck nur durch die Bedingung $D = 0$ zum Verschwinden gebracht werden, da die beiden Ausdrücke $\sqrt{R} \pm (a_{11} - a_{22})$, worin R und $(a_{11} - a_{22})$ Funktionen von λ sind, für keinen Wert des Parameters λ Null werden können.

$D = 0$ aber besagt: *Die drei Ecken u, v und w des dem Büschel zugewiesenen Polardreiecks sind Doppelpunkte der Kurve.* Die Ecken u, v und w sind aber bei vier reellen Grundpunkten stets reell. Die denselben zugewiesenen Doppelpunktstangenten halbieren die Winkel der Geradenpaare, die dem Büschel als zerfallende Kegelschnitte angehören *und stehen senkrecht aufeinander.*

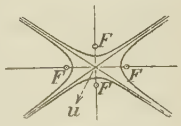


Fig. 6.

Um dies einzusehen, betrachte man die Geradenpaare als Hyperbeln, bei denen die Brennpunkte dem Scheitel sehr nahe gerückt sind. Dies kann offenbar in doppelter Weise geschehen, und die Verbindungslinie zweier zusammengehöriger Brennpunkte, die einander unendlich nahe gerückt sind — das werden die Doppelpunktstangenten in den Ecken des Polardreiecks — halbieren stets die Winkel des Geradenpaares und stehen daher aufeinander senkrecht.

Die noch fehlenden drei Doppelpunkte unserer Bpk. fallen mit den Höhenfußpunkten des Polardreiecks (uvw) zusammen. Sie sind daher mit seinen Ecken gleichzeitig reell; sie mögen in der Folge stets mit α, β, γ bezeichnet werden.[1])

Der Beweis für diesen interessanten Satz, der unseres Wissens zuerst von Bobek bemerkt worden ist, läßt sich auf rechnerische Weise leicht erbringen, wenn man das Koordinatensystem so wählt, daß vom Polardreieck (uvw) die Ecke v im Anfangspunkt und die Ecke w auf auf der Y-Achse angenommen werden, wodurch der Höhenfußpunkt α von selbst auf letztere zu liegen kommt. Es zeigt sich dann, daß die vier Geraden C_i, die nach § 1 durch Transformation aus den *vier durch α gelegten Kreisen K_i* — mit den Mittelpunkten P_i — entstehen, ein *gleichschenkliges Doppeldreieck* bilden. Ein solches läßt aber stets *zwei* berührende Kreise Λ_1 und Λ_2 zu. Die diesen entsprechenden Kreise L_1

1) Hier mag darauf hingewiesen werden, daß auch die Bpk. einer Schar von Kegelschnitten durch die Höhenfußpunkte des derselben zugewiesenen Polardreiecks geht. Vergl. Salmon-Fiedler, Bd. II, pag. 521.

und L_2 sind dann Leitkreise für zwei verschiedene Kegelschnitte des Büschels, die beide α zum Brennpunkt haben, woraus zu folgern ist, daß α ein Doppelpunkt der Bpk. wird.

Übrigens läßt sich dieser *algebraische* Nachweis auch durch eine *projektivische* Betrachtung ersetzen.

Wir denken uns durch α *zwei aufeinander senkrechte Strahlen* αp und αq gelegt. Da alle Pole der Geraden αp in Bezug auf die Büschelkegelschnitte selbst auf einem *Kegelschnitt* (Polkegelschnitt) liegen, kommt es offenbar *zweimal* vor, daß der Pol von αp auf αq liegt. Es gibt daher im Büschel zwei Kegelschnitte K_1 und K_2, für welche die Strahlen αp und αq *konjugiert* sind. Für die gleichen Kegelschnitte sind auch die *rechtwinkligen* Strahlen αu und αv *konjugiert*, da sie ja für *alle* Kegelschnitte des Büschels konjugiert sind. α ist somit für K_1 und K_2 der Scheitel einer *rechtwinkligen* Strahleninvolution oder mit anderen Worten: *α ist Brennpunkt für zwei Kegelschnitte des Büschels und damit ein Doppelpunkt der Bpk.*

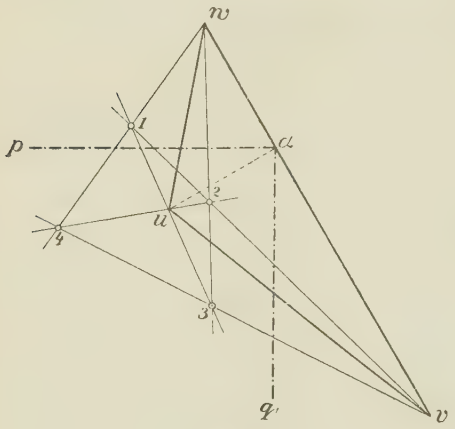


Fig. 7.

Im allgemeinen sind sämtliche erhaltenen acht Doppelpunkte J_1, J_2, u, v, w, α, β und γ eigentliche Doppelpunkte der Kurve und keine Spitzen. Für das Tripel (u, v, w) konnten wir die Doppelpunktstangenten angeben, während die Richtigkeit der Behauptung für das Tripel (α, β, γ) aus dem eben durchgeführten Beweis gefolgert werden kann. Schwieriger gestaltet sich der Nachweis für die Doppelpunkte J_1 und J_2, da sie imaginär sind. An einem späteren, speziellen Büschel (S. 22) jedoch können wir ihre Eigenschaft als eigentliche Doppelpunkte der Kurve einwandfrei nachweisen, woraus jedenfalls zu entnehmen ist, daß die Punkte J_1 und J_2 im allgemeinen keine Spitzen der Bpk. sind. Hiernach enthält die Ortskurve 8 eigentliche Doppelpunkte und besitzt somit keine weitere Spitze. Es begegnet nun keinen Schwierigkeiten für den allgemeinen Fall der Bpk. die Plückerschen Zahlen aufzustellen, und schließen wir uns in der Bezeichnungsweise Salmon-Fiedler an (Höhere ebene Kurven, VI. Abschnitt).

Es ergibt sich folgende Tabelle:

Ordnung der Bpk.:	$\mu = 6$;	Doppelpunktsanzahl:	$\delta = 8$
Klasse „ „	$\nu = 14$;	Spitzenanzahl:	$\varkappa = 0$
Anzahl der Wendepunkte:	$\iota = 24$;	Anzahl der Doppeltangenten:	$\tau = 52$.

In den speziellen Fällen erleiden natürlich diese Zahlen mannigfache Modifikationen.

Was die mehrfachen Tangenten der Bpk. angeht, so können wir solche durch folgende einfache Betrachtung gewinnen, indem wir an die Gleichungsform von Möbius anknüpfen:

$$F_1 \cdot \varrho_1 + F_2 \varrho_2 + F_3 \varrho_3 + F_4 \varrho_4 = 0.$$

Der Schnitt der Bpk. mit $0 = \varrho_1 = \sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2}$ z. B., ergibt sich aus der Gleichung $\varphi \equiv F_2 \varrho_2 + F_3 \varrho_3 + F_4 \varrho_4 = 0$. Nun bedeutet $\varrho_1 = 0$ dasjenige Geradenpaar, welches den Grundpunkt P_1 mit den Punkten J_1 und J_2 verbindet ($P_1 J_1$ und $P_1 J_2$). $\varphi = 0$ bedeutet ferner eine bizirkulare Kurve IV. Ordnung (Salmon-Fiedler, Höhere ebene Kurven S. 160).

Man erhält daher Punkte der Bpk., die zugleich auf der Geraden $P_1 J_1$ liegen, durch den Schnitt der letzteren mit der *bizirkularen Kurve* IV. Ordnung. Auf $P_1 J_1$ liegen somit nur vier Punkte der Bpk. Davon fallen aber zwei in J_1 selbst hinein, so daß die Linie $P_1 J_1$ mit der Kurve IV. Ordnung und zugleich auch mit der Bpk. VI. Ordnung nur noch weitere zwei (m und n) gemeinsam hat. Die Linie $P_1 J_1$ muß aber, wie jede Gerade, die Bpk. in sechs Punkten schneiden, dies ist nur dadurch möglich, daß $P_1 J_1$ die Kurve VI. Ordnung in den Punkten m und n *berührt.* Der Fall, daß m und n etwa Doppelpunkte der Bpk. wären, ist nach dem Vorausgehenden ganz und gar undenkbar. Damit ist für sämtliche acht gerade Linien $P_i J_1$ und $P_i J_2$ nachgewiesen, daß sie für die Brennpunktskurve des Büschels Doppeltangenten sind.[1])

Daraus folgt aber vermöge der Definition der Brennpunkte höherer Kurven, *daß die P_i Doppelbrennpunkte der Bpk. sind.*

C. Der Verlauf der Bpk. im allgemeinen.

Wir untersuchen den allgemeinen Verlauf der Bpk. eines Büschels von Kegelschnitten dadurch, daß wir zunächst den Grundpunkten desselben willkürliche numerische Koordinaten erteilen und für eine aus-

1) G. Darboux: Nouvelles Annales, 1880. pag. 184 ff.

reichende Anzahl von Kegelschnitten des Büschels Ordinate und Abszisse der zugehörigen Brennpunkte berechnen, die dann weiterhin in dem Koordinatensystem einzutragen sind. Im Nachfolgenden sei eine derartige Untersuchung kurz beschrieben:

Die Grundpunkte besitzen die Koordinaten (Fig. 5):

$$\begin{array}{c|c|c|c} x_1 = -4 & x_2 = -2 & x_3 = +1 & x_4 = +3 \\ y_1 = -4 & y_2 = +2 & y_3 = +1 & y_4 = -3 \end{array}$$

Nimmt man als Fundamentalkegelschnitte die Geradenpaare (1, 2) und (3, 4) bezw. (1, 3) und (2, 4), so wird die Büschelgleichung

$$12x^2 + 2xy - 2y^2 + 14x + 22y - 48 + \lambda(y^2 - x^2) = 0.$$

Ferner:

$$D = \begin{vmatrix} 12-\lambda & 1 & 7 \\ 1 & \lambda - 2 & 11 \\ 7 & 11 & -48 \end{vmatrix} = 24\lambda(2\lambda - 25)$$

$$R = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = 4((7-\lambda)^2 + 1)$$

und endlich:

$$A_{13} = 25 - 7\lambda; \quad A_{23} = 125 - 11\lambda; \quad A_{33} = -\lambda^2 + 14\lambda - 25.$$

Hiernach gestaltet sich die analytische Darstellung der Koordinaten eines Punktes der Bpk. als irrationale Funktionen des Parameters λ folgendermaßen:

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{7\lambda - 25 \pm \sqrt{24\lambda(2\lambda-25)\left[\sqrt{(7-\lambda)^2+1} + 7 - \lambda\right]}}{\lambda^2 - 14\lambda + 25} \\ \eta = \dfrac{125 - 11\lambda \pm \sqrt{24\lambda(2\lambda-25)\left[\sqrt{(7-\lambda)^2+1} - 7 + \lambda\right]}}{\lambda^2 - 14\lambda + 25}. \end{cases}$$

Diese läßt sich durch eine andere mit Hilfe des Parameters u ersetzen und würde lauten:

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{-2u(u+7)(7u+50) \pm 8\sqrt{3}\cdot(u+7)\cdot\sqrt{(u+7)(u^2-50)(u^2+25u+125)}}{u^2(u+14)^2 - 2400} \\ \eta = \dfrac{2(u+7)(11u^2+250u+1200) \pm 4\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{(u+7)(u^2-50)(u^2+25u+125)}}{u^2(u+14)^2 - 2400}. \end{cases}$$

Indessen ist die erste Form mit dem Parameter λ für die numerische Berechnung ganz geeignet, weshalb wir die fernere Untersuchung gerade an sie knüpfen.

Dabei hat man das Zeichen der Größe $\sqrt{R} = \sqrt{(7-\lambda)^2 + 1}$ dem der Größe $D = 24\lambda(2\lambda - 25)$ gleich zu wählen.

Z. B. $\lambda = 9$ ergibt $D = -1512$, folglich wird: $\sqrt{R} = -\sqrt{5} = -2{,}2361$. Die Werte der obigen Hauptradikale sind $R(\xi) = 80{,}031$ und $R(\eta) = 18{,}894$. Und hieraus folgen:

$$\frac{\xi_1 = -5{,}902}{\xi_2 = -2{,}102} \quad \frac{\eta_1 = -2{,}245}{\eta_2 = -0{,}355}.$$

Trägt man diese Koordinaten im System ein, *so ergeben sich stets vier Punkte, die in den Ecken eines Rechtecks liegen, von denen allerdings nur zwei* — die Endpunkte einer Diagonale — als Brennpunkte eines Büschelkegelschnitts *brauchbar sind.* Welche von den beiden Diagonalen zu wählen ist, ermittelt man am einfachsten graphisch, wie folgt: Da die zwei gesuchten Punkte f_1 und f_2 Brennpunkte eines Kegelschnitts sein müssen, der durch die vier gegebenen Grundpunkte P_i des Büschels geht, so müssen gleichzeitig die 4 Summen oder die 4 Differenzen aus den Abständen: $P_i f_1$ und $P_i f_2$ dem absoluten Werte nach einander gleich sein, d. h.:

$$P_1 f_1 \pm P_1 f_2 = P_2 f_1 \pm P_2 f_2 = P_3 f_1 \pm P_3 f_2 = P_4 f_1 \pm P_4 f_2,$$

je nachdem der dem gewählten λ entsprechende Kegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel ist, was am einfachsten aus dem Vorzeichen seiner Diskriminante, d. i. A_{33}, zu erkennen ist.

Z. B. für $\lambda = 9$ wird im obigen Beispiel $A_{33} = -\lambda^2 + 14\lambda - 25 = 20$, daher > 0, weshalb die mit $\lambda = 9$ gegebene Kurve zweiter Ordnung eine Ellipse ist. Durch Abmessen der vier Entfernungspaare $P_i f_1$ und $P_i f_2$, wurden in der Originalzeichnung der Bpk. die Summen: $P_i f_1 + P_i f_2 = 209{,}5$ mm gefunden, wenn man die eine Diagonale auf ihre Richtigkeit prüft. Die andere Rechtecksdiagonale ist zu verwerfen.

Bei einiger Übung ist auch diese graphische Kontrolle zu entbehren oder doch nur wenig oft von Nöten.

Für diejenigen Werte von λ, welche die beiden Büschelparabeln charakterisieren, d. s.: $\lambda_{1,2} = 7 \pm \sqrt{24} =$ ca 11,9 bezw. 2,1, versagt die obige Parameterdarstellung, da für sie der Nenner $A_{33} = 0$ wird, und damit die Werte ξ und η gleichzeitig unendlich werden. Um dem zu begegnen, hat man eigene Formeln aufzustellen, die der Vollständigkeit halber hier angegeben seien.

Lautet die Gleichung der Parabel:

$$(y - \mu x)^2 + 2c_{13}x + 2c_{23}y + c_{33} = 0,$$

so dienen zur Berechnung ihrer Brennpunktskoordinaten folgende Formeln:

$$\xi = \frac{c_{23}^2 - c_{13}^2 - 2\mu c_{13} c_{23} - c_{33}(1+\mu^2)}{2(1+\mu^2)(c_{13} + \mu c_{23})}, \quad \eta = \frac{\mu(c_{13}^2 - c_{23}^2) - 2c_{13}c_{23} - c_{33}\mu(1+\mu^2)}{2(1+\mu^2)(c_{13} + \mu c_{23})}.$$

In dem gegenwärtigen Beispiel, wo die vier Grundpunkte des Büschels ein allseits konvexes Viereck bestimmen, sind die beiden Parabeln reell, *daher besteht die hyperelliptische Brennpunktskurve vom Geschlechte* $p = 2$ *aus einem hyperbolischen und zwei elliptischen Ästen, im ganzen also aus* $p + 1 = 3$ *Ästen.*

Um nun die Art der Verteilung von zusammengehörigen oder *konjugierten* Brennpunkten auf der Ortskurve möglichst klar darzustellen, wurden in der Hauptfigur auf Seite 13, die den Verlauf der allgemeinen Bpk. eines Büschels vor Augen führt, je ein Paar von solchen durch eine Strecke verbunden und man erkennt daraus unmittelbar, *daſs zwei konjugierte Brennpunkte stets auf dem gleichen Zuge der Bpk. liegen.* Erwähnenswert erscheint auch die Tatsache, daß *die Mittelpunkte ihrer Verbindungsstrecken einen Kegelschnitt, die Mittelpunktskurve des Büschels, erfüllen.*

Weiters ersieht man noch folgende allgemein gültige Beziehungen: Der Ausdruck: $A_{33} = -(\lambda^2 - 14\lambda + 25)$ wird

$$< 0 \text{ für } \lambda = -\infty \text{ bis } \lambda = 2{,}1 \text{ (ca)} \quad \text{I.}$$
$$> 0 \text{ „ } \lambda = 2{,}1 \text{ „ } \lambda = 11{,}9 \text{ (ca)} \quad \text{II.}$$
$$< 0 \text{ „ } \lambda = 11{,}9 \text{ „ } \lambda = +\infty \quad \text{III.}$$

Den Bereichen I und III entsprechen daher Hyperbeln und dem Bereiche II nur Ellipsen. Beim Vergleich mit der Figur ergibt sich daher: *Die beiden elliptischen Zweige der Bpk. enthalten ausschließlich Brennpunkte von Büschelhyperbeln, während der hyperbolische Zweig sowohl solche von Ellipsen als auch von Hyperbeln aufweist.* Die Parabelbrennpunkte ($\lambda = 2{,}1$ bezw. $\lambda = 11{,}9$) trennen dieselben.

Der Übergang von einem Ast der Bpk. zum andern, erfolgt stets in den Ecken des Polardreiecks (u, v, w), *oder an den Stellen, wo* $D = 24\lambda(2\lambda - 25) = 0$, d. h. bei $\lambda = 0$; $\lambda = 12{,}5$; $\lambda = \infty$.

Wir glauben hiermit den Verlauf der Bpk. ausreichend beschrieben zu haben. Bezüglich der Ausführung der Figuren für die einzelnen speziellen Bpk. sei hier bemerkt, daß die Geradenpaare des Büschels durch Strichpunktierung, das Polardreieck durch einfache Punktierung, die Höhenlote des Polardreicks durch kürzere Punktierung erkennbar gemacht wurden.

§ 4. Die verschiedenen Formen der Bpk. eines Kegelschnittbüschels.

Im vorigen Paragraphen wurden hauptsächlich die allgemeinen Eigenschaften der Bpk. eines Kegelschnittbüschels erörtert und ihre Gestalt an einem ersten Beispiel gekennzeichnet. Es gibt jedoch zahl-

reiche andere Formen der Kurve, ganz nach den verschiedenen Annahmen, die man über die gegenseitige Lagenbeziehung der vier Grundpunkte machen kann.

In der Folge sollen nun nach Möglichkeit sämtliche Abarten von Büscheln in Kürze behandelt und dabei die gestaltlichen Verhältnisse der auftretenden Bpk. in einer Figur festgehalten werden. Außerdem geben wir am Schlusse eines jeden Beispiels eine kurze Charakteristik ihrer Doppelpunkte und auch ihrer unendlich weiten Punkte. Die Namen derselben seien wie früher gewählt $[J_1, J_2, u, v, w, \alpha, \beta, \gamma, p, q]$; ein darüber gesetzter Stern soll andeuten, daß der betr. Punkt imaginär ist. Der Vollständigkeit halber sei der vorhin behandelte Fall rekapituliert.

A. Die vier Grundpunkte P_i liegen getrennt und zwar nicht in den Ecken eines Kreisvierecks.

Nr. 1. Die P_i bilden ein allseits *konvexes* Viereck. (Fig. 8.)

Koord. der P_i, siehe Seite 18.

Verlauf: Eine bizirkulare Kurve VI. Ordnung, zwei elliptische Züge und ein hyperbolischer.

Geschlecht: $p = 2$.

Auf der unendlich fernen Geraden G^∞: J_1^*, J_2^*, p, q.

Doppelpunkte: u, v, w, α, β, γ, J_1^*, J_2^*.

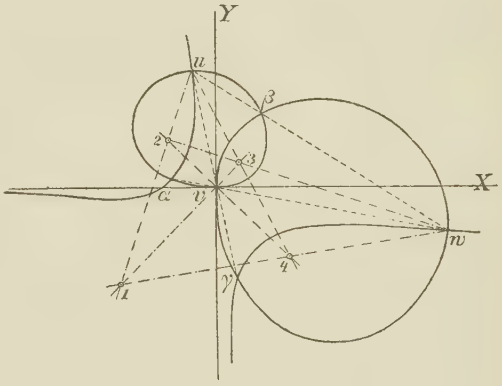


Fig. 8.

Nr. 2. Die P_i liegen in den Ecken eines *gleichseitigen* Dreiecks und seinem *Schwerpunkte.* (Fig. 9.)

Koord.: $P_1(-1, 0)$; $P_2(0, \sqrt{3})$; $P_3(1, 0)$; $P_4(0, \frac{1}{3}\sqrt{3})$.

Verlauf: Eine bizirkulare Kurve VI. Ordnung, drei elliptische Züge. $p = 2$.

Auf G^∞: J_1^*, J_2^*, $p^* = J_1^*$; $q^* = J_2^*$.

Doppelpunkte: u, v, w, α, β, γ, J_1^*, J_2^*.

Dieser Fall zeichnet sich vor dem allgemeinen dadurch aus, daß die unendlich fernen Parabelbrennpunkte in die unendlich fernen imaginären Kreispunkte fallen. Wir ersehen dies am einfachsten aus der früher (auf Seite 7) angegebenen Gleichungsform, wenn wir die darin

vorkommenden Größen ϱ und $\cos 3\varphi$ durch die Werte $\sqrt{x^2+y^2}$ bezw. $\frac{x^3-3y^2x}{\varrho^3}$ ersetzen und gleichzeitig zu homogenen Koordinaten übergehen, wobei folgende Gleichung für die Bpk. resultiert:

$$(y-xi)^2\cdot[(y+xi)^2\cdot(4x^2+4y^2-15z^2)]$$
$$+4(y-xi)\cdot z\cdot[(y+xi)(x^3-3y^2x+2z^3)]-z^2\cdot[z^4]=0.$$

Nach Salmon-Fiedler „Höhere Kurven“ S. 50 ergibt sich aus dieser Darstellung ohne weiteres, daß der durch: $(y-xi)=0$ und $z=0$ bestimmte Punkt (d. i. einer der imaginären ∞ fernen Kreispunkte) ein Doppelpunkt der Bpk. ist, dessen Haupttangenten dadurch gegeben

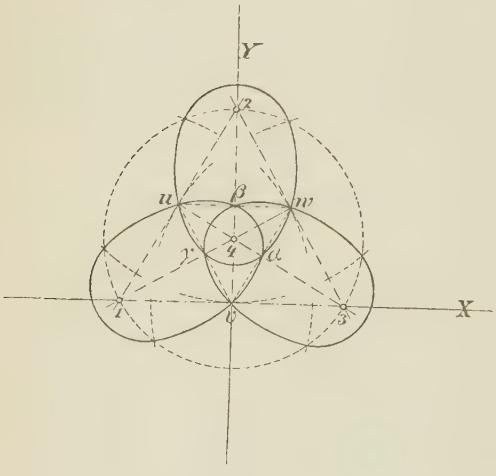


Fig. 9.

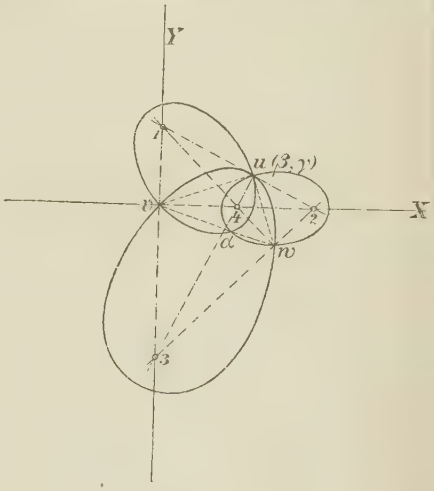


Fig. 10.

sind, daß man in den obigen eckigen Klammern setzt: $x=1$; $y=i$; $z=0$. Man erhält so als Gleichungen für die Haupttangenten: $(y-xi)\cdot z=0$, sodaß die eine mit der G^∞ $(z=0)$, die andere mit der absoluten Richtung $(y-xi=0)$ zusammenfällt. *Damit ist aber bewiesen, daß die Punkte J_1^* und J_2^* im allgemeinen keine Spitzen der Bpk. sind.*

Nr. 3. Die Grundpunkte: $P_1P_2P_3$ bilden ein Dreieck, in dessen Höhenschnittpunkt P_4 liegt, außerdem ist das Polardreieck des Büschels bei *u rechtwinklig.* (Fig. 10.)

Koord.: $P_1(0,1)$; $P_2(2,0)$; $P_3(0,-2)$; $P_4(1,0)$.

Verlauf: Eine bizirkulare Kurve VI. Ordnung, drei elliptische Züge. $p=2$.

Auf G^∞: J_1^*, J_2^*, p^*, q^*.

Doppelpunkte: v, w, α, J_1^*, J_2^*.

Dreifacher Punkt: $u = (u + \beta + \gamma)$.

Bemerkung: Da das Polardreieck bei u rechtwinklig ist, so vereinigen sich mit dem Doppelpunkt u noch die beiden anderen β und γ zu einem dreifachen Punkt. Die noch verbleibenden drei Doppelpunkte lassen sich nicht etwa auf ähnliche Weise in einen dreifachen Punkt zusammenziehen, weil dann das Polardreieck zwei rechte Winkel haben müßte. Jener Fall tritt nur ein, wenn die P_i in den Ecken eines Antiparallelogramms liegen würden. Dabei aber zerfällt die Bpk., wie wir später sehen werden.

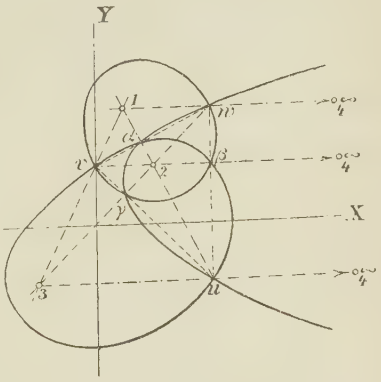


Fig. 11.

Nr. 4. P_1, $P_2 P_3$ liegen im Endlichen, P_4 *im Unendlichen*, zugleich liegt P_2 im Höhenschnittpunkt des Polardreiecks. (Fig. 11.)

Koord.: $P_1(\frac{1}{2}, 2)$; $P_2(1, 1)$; $P_3(-1, -1)$; $P_4(\infty, 0)$.

Verlauf: Eine bizirkulare Kurve VI. Ordnung, zwei elliptische Züge, ein *parabolischer*.

$p = 2$.

Auf G^∞: J_1^*, J_2^*, $p = q$.

Doppelpunkte: u, v, w, α, β, γ, J_1^*, J_2^*.

Nr. 5. Die 4 Grundpunkte liegen in den Ecken eines *Trapezes*.

Koord.: $P_1(0, 1)$; $P_2(3, 1)$; $P_3(5, -1)$; $P_4(0, -1)$. (Fig. 12.)

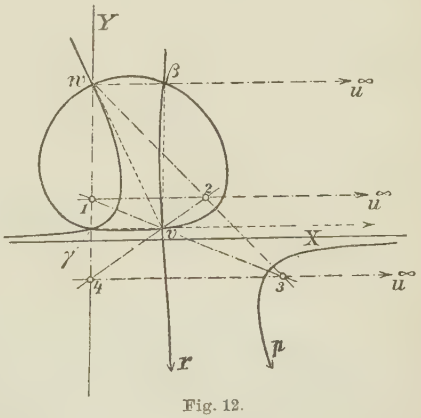


Fig. 12.

Die Bpk. müßte auf G^∞ als Doppelp. J_1^* und J_2^*, außerdem die Ecke u des Polardreiecks, ferner als einfachen Punkt den Brennpunkt p der Büschelparabel enthalten, also im ganzen 7 Punkte. Als Kurve VI. Ordnung im allgemeinen Fall muß daher die Bpk. für dieses Beispiel *in eine zirkulare Kurve V. Ordnung* und in G^∞ zerfallen.

Verlauf: Eine zirkulare Kurve V. Ordnung, ein elliptischer, ein hyperbolischer, ein unpaarer Zug.

$p = 2$.

Auf G^∞: J_1^*, J_2^*, p, u, r.
Doppelpunkte: v, w, β, γ.

Die Richtung für r ist senkrecht zur Grundlinie des Trapezes. Das Geradenpaar (1, 2) (3, 4) ist als Hyperbel aufzufassen, deren Brennpunkte in dieser Richtung liegen.

Nr. 6. Die 4 Grundpunkte liegen in den Ecken eines *Parallelogramms.* (Fig. 13.) Das Kegelschnittbüschel besteht aus lauter kon-

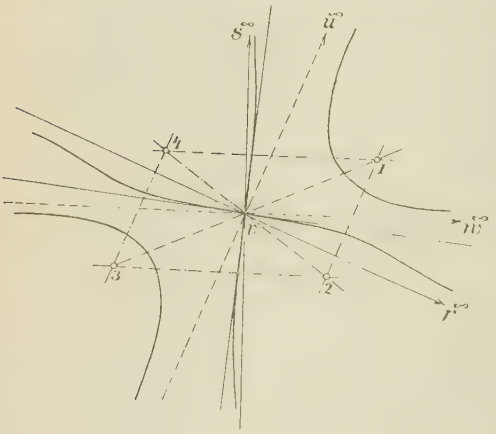


Fig. 13.

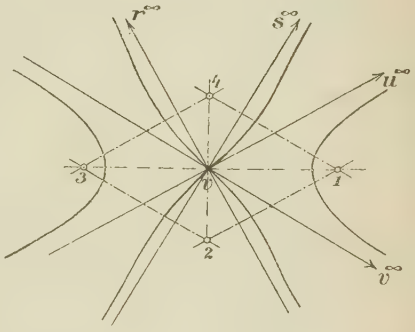


Fig. 14.

zentrischen Kurven. In der Darstellung auf Seite 9 sind $A_{13} = A_{23} = 0$ zu setzen. Ähnlich wie in 5. spaltet sich von der zu erwartenden Kurve V. Ordnung G^∞ noch einmal ab.

Verlauf: Zwei unpaare Äste, ein hyperbolischer. Eine zentrische Kurve IV. Ordnung.

$p = 2$.

Auf G^∞: u, w, r, s. (Richtung für $r \perp 1, 2$ „ „ $s \perp 2, 3$).

Doppelpunkt: v.

Nr. 6a. Die P_i liegen in den Ecken einer *Raute.* Die Bpk. wird in Bezug auf die beiden Rhombusdiagonalen symmetrisch. (Fig. 14.)

Bilden die P_i die Ecken eines *Rechteckes,* so wird die Bpk. des Büschels durch seine beiden Symmetrielinien dargestellt.

B. Die vier Grundpunkte liegen in den Ecken eines Kreisvierecks.

Bei dieser speziellen Lage der Grundpunkte ergibt sich eine bemerkenswerte Vereinfachung der Bpk., die bereits von Sylvester[1]) bemerkt wurde.

1) Nach Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der Kegelschnitte, Bd. II, pag. XIII, Nr. 101.

Die Bpk. zerfällt in zwei zirkulare Kurven III. Ordnung. Dies folgt sowohl aus der Gleichungsform nach Möbius, als auch aus unserer Parameterdarstellung:

a) Wenn nämlich die 4 P_i auf einem Kreise liegen, so sind die Achsen sämtlicher Büschelkegelschnitte zu zwei aufeinander senkrecht stehenden Richtungen, den Winkelhalbierenden der zerfallenden Kegelschnitte, parallel.[1]) Wählt man daher das Koordinatensystem von vornherein so, daß seine Achsen diesen Richtungen parallel sind, so ergibt sich aus der Beziehung auf S. 6: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{Y}{X}$ entweder $\alpha = 0$, oder $\alpha = 90^0$. D. h. die Bpk. zerfällt in:

$$\begin{vmatrix} \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$\varrho_1(x_2 - x_3) + \varrho_2(x_3 - x_1) + \varrho_3(x_1 - x_2) = 0$$

bezw.:

$$\varrho_1(y_2 - y_3) + \varrho_2(y_3 - y_1) + \varrho_3(y_1 - y_2) = 0,$$

zwei verschiedene zirkulare Kurven III. Ordnung, da in beiden Fällen die Summe der ϱ_i Koeffizienten verschwindet.[2])

b) Um das Zerfallen in anderer Weise zu zeigen, wählen wir als Gleichung des Büschels:

$$(a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}) + \lambda(x^2 + y^2 - r^2) = 0.$$

Daraus folgt:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} + \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda r^2 \end{vmatrix}$$

$$R = (a_{11} - a_{22})^2 = a^2$$

$$\sqrt{R} = \pm a.$$

Nunmehr ergeben sich für die Darstellung der Koordinaten ξ und η als Funktionen des Parameters λ folgende zwei getrennte:

I.
$$\xi = \frac{-a_{13}(a_{22} + \lambda) \pm \sqrt{a \cdot D}}{(a_{11} + \lambda)(a_{22} + \lambda)}$$
$$\eta = \frac{-a_{23}}{a_{22} + \lambda}$$

II.
$$\xi = \frac{-a_{13}}{a_{11} + \lambda}$$
$$\eta = \frac{-a_{23}(a_{11} + \lambda) \pm \sqrt{-aD}}{(a_{11} + \lambda)(a_{22} + \lambda)}$$

1) C. F. Geiser, Jakob Steiners etc. pag. 208.
2) Salmon-Fiedler, Höhere Kurven pag. 160.

Sie definieren zwei getrennte Kurven III. Ordnung, die beide elliptisch sind, da D vom 3. Grad in λ ist. Sie durchschneiden sich gegenseitig, wie früher in den Punkten:

$$u,\ v,\ w,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ J_1^*,\ J_2^*,$$

endlich im Mittelpunkte m des Büschelkreises, überall unter rechtem Winkel.[1]) In m, u, v, w laufen die Tangenten beider Kurven parallel

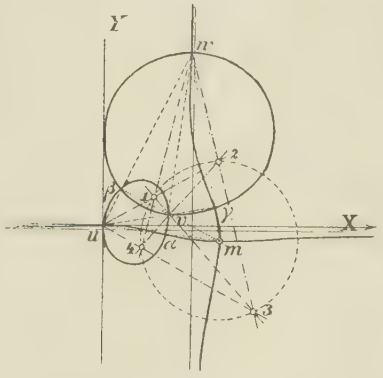


Fig. 15.

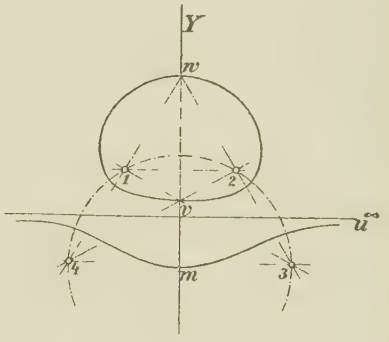


Fig. 16.

zu den wie vorhin speziell gewählten Koordinatenachsen. Die Achsen der beiden Büschelparabeln sind die beiden Asymptoten für die zwei Kurven III. Ordnung.

Nr. 7. Dem gezeichneten Fall wurde folgendes Büschel zu Grunde gelegt: (Fig. 15.)

$$(y - 4x + 2)(y + 4x - 6) + \lambda(3y^2 - x^2) = 0.$$

Nr. 8. Die 4 P_i liegen in den Ecken eines *Antiparallelogramms.* (Fig. 16.) Büschelgleichung:

$$(y - p)(y - q) + \lambda(x^2 + y^2 - r^2) = 0.$$

Von den beiden entstehenden Kurven III. Ordnung reduziert sich eine auf die *doppelt* zählende Symmetrielinie des Antiparallelogramms (I. $\xi = 0$), während die andere durch folgendes Gleichungspaar gegeben wird:

II. $$\xi = \sqrt{\frac{-D}{\lambda(\lambda+1)}}; \qquad \eta = \frac{p+q}{2(\lambda+1)}.$$

Nach Nr. 5 war eine Kurve V. Ordnung zu erwarten.

1) Salmon-Fiedler, Höhere Kurven pag. 327, 328 ff.

C. Von den vier Grundpunkten rücken zwei unter Festlegung einer Grundtangente samt Berührpunkt zusammen.

Als Resultat ergibt sich wieder eine bizirkulare Kurve VI. Ordnung, die im allgemeinen nur zwei reelle Doppelpunkte, zwei imaginäre und einen vierfachen Punkt enthält.

Aus den beiden nebenstehenden Figuren (17a u. 17b) ersieht man ohne Schwierigkeit, daß, wenn die beiden zunächst noch getrennt liegenden Punkte P_3 und P_4 unter Festlegung einer Grundtangente T zusammenrücken, das Polardreieck (uvw) des Büschels in eine doppelt zählende Strecke $(u\,v)$ degeneriert. Während seine Ecke v durch durch den Schnitt von P_1P_2 mit $T = X$ erhalten wird, rücken die beiden anderen Ecken u und w in dem Berührpunkt $O = u$ (auf der Grundtangente) zusammen und zwar unter Festlegung eines Strahles Σ, der zu $T = X$ in Bezug auf die Strahlen OP_1 und OP_2 *harmonisch* gelegen ist. Somit wird auch von den drei Höhenfußpunkten (α, β, γ) des Polardreiecks nur mehr einer, der der Ecke v gegenübersteht, d. i.: β, für sich bestehen bleiben, während die beiden anderen α und γ mit u und w koinzidieren.

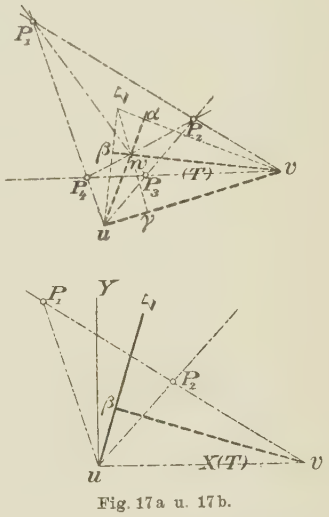


Fig. 17a u. 17b.

Die Kurve VI. Ordnung wird aber jetzt unikursal, Denn nehmen wir, wie auf Seite 11 das Büschel ($a_{33} = 0$!):

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + \lambda(y^2 - \varkappa^2x^2) = 0,$$

so wird die Parameterdarstellung der Bpk.:

$$\mu\xi = 2\varrho(a+u)A_{13} + \varkappa\cdot(a+u)\cdot\sqrt{\varrho c\cdot(u^2 - R^*)}$$

$$\mu\eta = -2\varrho(a+u)A_{23} + 2\varkappa a_{12}\cdot\sqrt{\varrho c\cdot(u^2 - R^*)}$$

$$\mu\xi = 2\varrho(a+u)A_{33}.$$

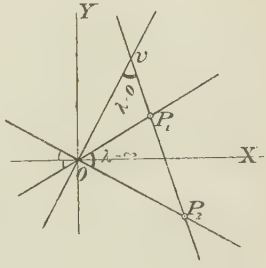


Fig. 18.

Da das Radikal einen Radikand von der Ordnung 2 in λ enthält, so lassen sich ξ, η, ζ durch Einführung eines neuen

Parameters v rational darstellen, d. h. die Brennpunktskurve wird unikursal. Es müssen daher noch weitere Doppelpunkte in ihr auftreten. Um deren Existenz zu erkennen, kehren wir zur Gleichungsform nach Möbius zurück und versuchen einen Grenzübergang. Sei in dem Büschel nebenan (Fig 19.) die Entfernung der beiden Grundpunkte $P_3 P_4$ etwa mit ε bezeichnet, so ist nach Möbius die Gleichung der Brennpunktskurve:

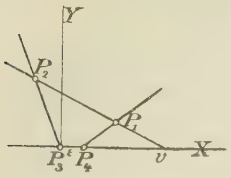


Fig. 19.

I. $$F_1\varrho_1 + F_3\varrho_3 = F_2\varrho_2 + F_4\varrho_4,$$

wobei:

$$F_1 = \frac{\varepsilon y_2}{2} = (\Delta 2, 3, 4);$$

und endlich:

$$F_2 = \frac{\varepsilon y_1}{2} = (\Delta 1, 3, 4)$$

$$F_3 = \frac{\varepsilon (y_1 - y_2) + \Delta}{2} = (\Delta 1, 2, 4)$$

$$F_4 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2} = (\Delta 1, 2, 3) = \frac{\Delta}{2}.$$

Setzt man alle diese Größen in I. oben ein, so hat man zunächst, wenn: $\varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ als Gleichung der Bpk.:

II. $$\varepsilon(y_2\varrho_1 - y_1\varrho_2) + (y_1 - y_2)\varrho\varepsilon = -\Delta \cdot (\varrho_4 - \varrho).$$

Dabei ist:

$$\varrho_1 = \sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2} \qquad \varrho_3 = \varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

$$\varrho_2 = \sqrt{(\xi - x_2)^2 + (\eta - y_2)^2} \qquad \varrho_4 = \sqrt{(\xi - \varepsilon)^2 + \eta^2}$$

Für sehr kleine ε gilt:

$$\varrho_4 - \varrho_3 = \varrho_4 - \varrho = \varrho \cdot \left[\sqrt{1 - \frac{2\varepsilon\xi - \varepsilon^2}{\varrho^2}} - 1\right]$$

und in erster Annäherung:

$$\varrho_4 - \varrho = -\frac{\varepsilon\xi}{\varrho} + \varepsilon^2(\quad) \cdots$$

Unter Berücksichtigung dieser Umformung gestaltet sich nach Weghebung von ε und durch die Annahme $\lim \varepsilon = 0$ die Gleichung II. der Bpk. für das besondere Büschel folgendermaßen:

$$(y_2\varrho_1 - y_1\varrho_2) \cdot \varrho + \varrho^2 \cdot (y_1 - y_2) + \Delta \cdot \xi = 0.$$

Diese irrationale Beziehung läßt sich rationalisieren, und man kommt dabei auf folgende Gleichung:

$$4y_1y_2\cdot(y_1-y_2)(\xi^2+\eta^2)^2\cdot[\xi^2y_1y_2(y_1-y_2)-2\xi\eta y_1y_2(x_1-x_2)+\eta^2(x_1^2y_2-x_2^2y_1)]$$

$$+4y_1y_2(x_1y_2-x_2y_1)(\xi^2+\eta^2)\cdot\begin{bmatrix}2\xi^2y_1y_2(\xi(y_1-y_2)-\eta(x_1-x_2))\\+\xi\eta^2((x_1+x_2)(x_1y_2-x_2y_1)+2y_1y_2(y_1-y_2))\\-\eta^3(y_1-y_2)(x_1y_2+x_2y_1)\end{bmatrix}$$

$$+(x_1y_2-x_2y_1)^2[4\xi^4y_1^2y_2^2+4\xi^2\eta^2y_1y_2(y_1y_2-x_1x_2)-\eta^4(x_1y_2+x_2y_1)^2]=0.$$

Hieraus ergibt sich aber sofort, daß die Bpk. eine bizirkulare Kurve VI. Ordnung ist, die im Anfangspunkt einen vierfachen Punkt besitzt. Von den diesem zugewiesenen Haupttangenten sind zwei reell und zwei konjugiert imaginär, und je zwei zusammengehörige verhalten sich wie Strahl und reflektierter Strahl in Bezug auf die spiegelnd gedachte Grundtangente $T=X$, wie sich aus den folgenden Darstellungen für die vier Fortschreitungsrichtungen im Anfangspunkt unmittelbar ergibt:

$$\left(\frac{\eta}{\xi}\right)_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{\sin\varphi_1\sin\varphi_2}}{\cos\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)}$$

und

$$\left(\frac{\eta}{\xi}\right)_{3,4}=\pm\frac{\sqrt{-\sin\varphi_1\sin\varphi_2}}{\sin\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)},$$

dabei sind φ_1 und φ_2 die Polarwinkel für die Grundpunkte P_1 und P_2. Der vierfache Punkt ist bekanntlich mit sechs Doppelpunkten[1]) äquivalent; an weiteren singulären Punkten dieser Art lernten wir weiter oben v, β, J_1^* und J_2^* kennen, so daß die Bpk. VI. Ordnung im ganzen zehn Doppelpunkte — die Maximalzahl — enthält, woraus die Unikursalität der Ortskurve zu erschließen ist.

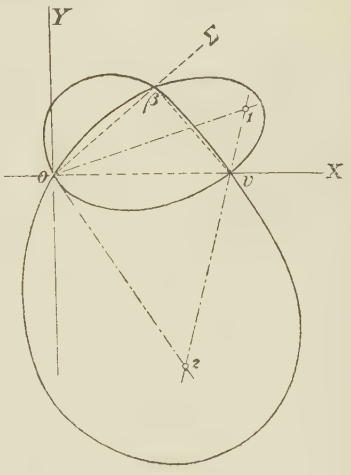


Fig. 20.

Nr. 9. P_1 und P_2 liegen auf *verschiedenen* Seiten der Grundtangente $T=X$. (Fig. 20.) Koordinaten: $P_1(3,1)$; $P_2(2,-3)$; $P_3(0,0)$; $P_4(0,0)$.

Verbindungslinie P_3P_4 fällt mit X zusammen.

Verlauf: Eine bizirkulare Kurve VI. Ordnung, unikursal ($p=0$), einer Kurve IV. Ordnung ähnlich.

Auf G^∞: J_1^*, J_2^*, p^*, q^*.

Doppelpunkte: J_1^*, J_2^*, v, β.

1) Salmon-Fiedler, Höhere Kurven pag. 37.

Vierfacher Punkt: O.

Nr. 10. P_1 und P_2 liegen auf der *gleichen* Seite der Grundtangente $T = X$. (Fig. 21.) Koordinaten: $P_1(1, 1)$; $P_2(-1, 2)$; $P_3(0, 0)$; $P_4(0, 0)$.

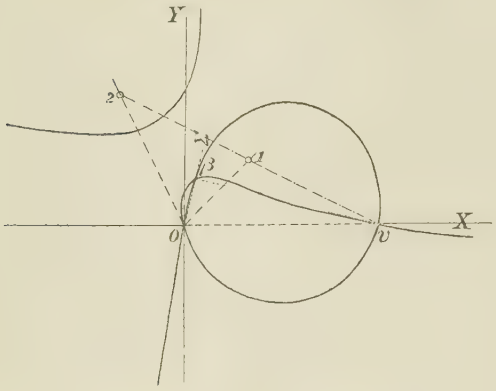


Fig. 21.

Verbindungslinie $P_3 P_4$ fällt mit X zusammen.

Verlauf: Eine bizirkulare Kurve VI. Ordnung; unikursal ($p = 0$); einer Kurve IV. Ordnung ähnlich.

Auf G^∞: J_1^*, J_2^*, p, q.

Doppelpunkte: J_1^*, J_2^*, v, β.

Vierfacher Punkt: O.

Nr. 11. Wie in Nr. 10, nur ist $P_1 P_2$ *parallel* zur Grundtangente $T = X$. (Fig. 22.) Koordinaten: $P_1(-1, 1)$; $P_2(2, 1)$; $P_3(0, 0)$; $P_4(0, 0)$.

Verbindungslinie $P_3 P_4$ fällt mit X zusammen.

Verlauf: Eine *zirkulare* Kurve V. Ordnung, *wie in Nr. 5.* Unikursal ($p = 0$).

Auf G^∞: J_1^*, J_2^*, p, r, v.

Doppelpunkte: —.

Vierfacher Punkt: O.

Nr. 12. Wie in Nr. 10, doch gehört dem Büschel auch ein *Kreis* an. (Fig. 23.) In dem Büschel:

$$0 = 2\,G_1 G_2 + \lambda K \equiv 2\,(xc + ys - r)\,(xc - ys - d) + \lambda\,(x^2 + y^2 - r^2)$$

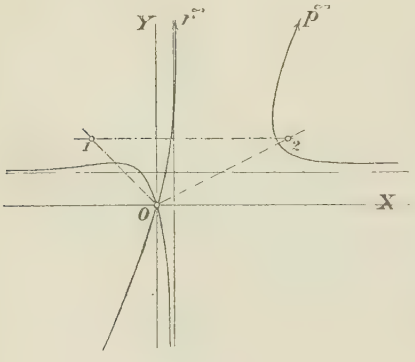


Fig. 22.

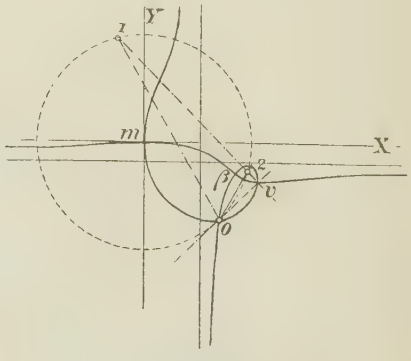


Fig. 23.

berühren alle Kegelschnitte die Gerade ov, d. i. $G_1 = 0$ und zwar in dem Punkte $0[x_1 = rc,\ y_1 = rs]$ für $c = \cos\alpha$ und $s = \sin\alpha$.

Verlauf: Wie im allgemeinen Falle Nr. 7 muß die Kurve VI. Ordnung in zwei zirkulare Kurven III. Ordnung zerfallen, deren Gleichungen für dieses Beispiel lauten würden:

I.
$$\left.\begin{aligned}\xi &= \frac{c\cdot(\lambda-2s^2)(d+r)\pm(r(\cos 2\alpha+\lambda)-d)\sqrt{-2\lambda}}{(\lambda-2s^2)(\lambda+2c^2)}\\ \eta &= \frac{s\cdot(\lambda+2c^2)(d-r)}{(\lambda-2s^2)(\lambda+2c^2)};\end{aligned}\right\}$$

II.
$$\left.\begin{aligned}\xi &= \frac{c(\lambda-2s^2)(d+r)}{(\lambda-2s^2)(\lambda+2c^2)}\\ \eta &= \frac{s(\lambda+2c^2)(d-r)\pm(r(\cos 2\alpha+\lambda)-d)\cdot\sqrt{+2\lambda}}{(\lambda-2s^2)(\lambda+2c^2)}.\end{aligned}\right\}$$

Man ersieht daraus, daß beide Kurven III. Ordnung durch den Berührpunkt O auf der Grundtangente $G_1 = 0$ gehen, wenn man den der Forderung $r(\cos 2\alpha + \lambda) - d = 0$ entsprechenden Wert λ in die obigen Gleichungen einsetzt, und zwar ist O Doppelpunkt für beide Kurven. Für die eine ist derselbe ein eigentlicher Doppelpunkt, für die andere ein isolierter Punkt. So ersehen wir recht einfach, daß in O ein vierfacher Punkt der Kurve liegt, dann aber weiter, daß die Kurve in Nr. 10 tatsächlich von der VI. Ordnung sein muß, weil sie für die gegenwärtige Nummer in zwei Kurven III. Ordnung zerfällt, was nicht denkbar wäre, wenn die Kurve in Nr. 10 etwa von der IV. Ordnung wäre.

Verlauf: Zwei unikursale zirkulare Kurven III. Ordnung, die beide einfach durch v, β, m, J_1^*, J_2^* hindurchgehen.

Auf G^∞: I. (J_1^*, J_2^*, p); II. (J_1^*, J_2^*, q).

Doppelpunkte: I. 0; II. 0. Für I. oder II. ein isolierter Punkt.

Nr. 13. Durch Kombination von Nr. 11 und Nr. 12 entsteht ein spezieller Fall von Nr. 8. (Fig. 24.)

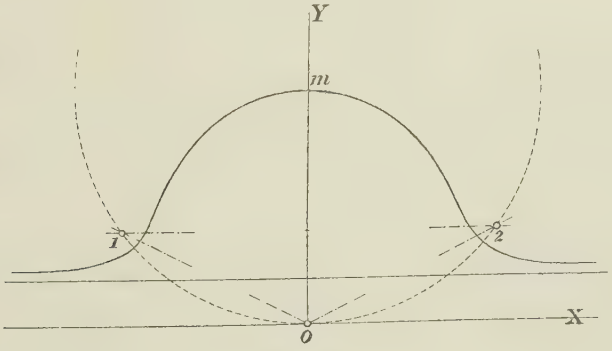


Fig. 24.

Büschelgleichung:

$$(x^2 + y^2 - 2ry) + \lambda y(y - 2a) = 0.$$

Bpk.: $\begin{cases} \xi = \dfrac{(r + a\lambda) \cdot \sqrt{\lambda}}{1 + \lambda} \\ \eta = \dfrac{r + a\lambda}{1 + \lambda}. \end{cases}$

Oder implizit: $\eta(\xi^2 + \eta^2) - (a\xi^2 + r\eta^2) = 0.$

Verlauf: Eine zirkulare, unikursale Kurve III. Ordnung, die den Berührpunkt O zum *isolierten* Doppelpunkt hat $\left(\lambda = -\frac{r}{a}\right)$.

Die folgenden Fälle behandeln die Bpk. derjenigen Kegelschnittbüschel, *bei denen der Berührpunkt auf der Grundtangente $T = X$ im Unendlichen liegt.* Die einzelnen Kegelschnitte eines derartigen speziellen Büschels gehen durch zwei feste vorgegebene Punkte P_1 und P_2 und besitzen eine bestimmte Gerade (die X-Achse) als Asymptote.

Den einzelnen Beispielen schicken wir eine allgemeine Behandlung voraus, weil sich die Vereinfachung der Bpk. für diesen Fall nicht so leicht durch eine kurze Überlegung ergibt. Ein derartiges Büschel, wo der Berührpunkt auf der Grundtangente im Unendlichen liegt, ist durch folgende Gleichung gegeben:

$$(y - 2a) \cdot (y - 2b) + 2\lambda y(y - \varkappa x) = 0.$$

Mit Hilfe der Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -\varkappa\lambda & 0 \\ -\varkappa\lambda & 1 + 2\lambda & -a - b \\ 0 & -a - b & 4ab \end{vmatrix} = -4\varkappa^2\lambda^2 ab$$

berechnen sich für einen Kegelschnitt des Büschels die Brennpunktskoordinaten ξ und η, wie folgt:

$$\xi = \frac{-(a + b) \pm \sqrt{2ab\left(\sqrt{(1 + 2\lambda)^2 + 4\varkappa^2\lambda^2} + 1 + 2\lambda\right)}}{\varkappa\lambda}$$

$$\eta = \pm \frac{\sqrt{2ab\left(\sqrt{(1 + 2\lambda)^2 + 4\varkappa^2\lambda^2} - 1 - 2\lambda\right)}}{\varkappa\lambda}.$$

Durch Separieren der beiden Hauptradikale und nachherige Multiplikation beider folgt:

$$\lambda = \frac{4ab - \eta(a + b)}{\varkappa\xi\eta}.$$

Setzt man diesen Wert in obige Gleichung für η ein, so bekommt man die Gleichung der Bpk. in impliziter Form:

$$\varkappa\eta^2((a+b)^2\eta^2+4ab\xi^2)-8\eta^2ab(a+b)(\xi+\varkappa\eta)+16a^2b^2(\varkappa\eta^2+2\xi\eta-\varkappa\xi^2)=0.$$

Die Bpk. ist somit von der IV. Ordnung und hat drei Doppelpunkte. Sie ist also wie die früheren Kurven dieser Litera unikursal. Der Strahl Σ, der auf Seite 27 eingeführt wurde, wird diesmal eine Parallele zu X, so daß Σ und X harmonisch liegen zu den Parallelen P_1O^∞ und P_2O^∞. Die von v (wie früher!) auf Σ gefällte Senkrechte bestimmt darauf den Doppelpunkt β. Der Anfangspunkt v wird aus dem niedersten Polynom obiger Gleichung als Doppelpunkt der Bpk. erkannt, seine Haupttangenten halbieren die Winkel der beiden Richtungen $y=0$ und $y=\varkappa x$.

Als dritter Doppelpunkt endlich tritt 0^∞ auf, wie durch Umstellung in obiger Gleichung leicht dargetan werden kann. Die zugehörigen Asymptoten haben die Gleichung:

$$\eta=\pm\sqrt{4ab}.$$

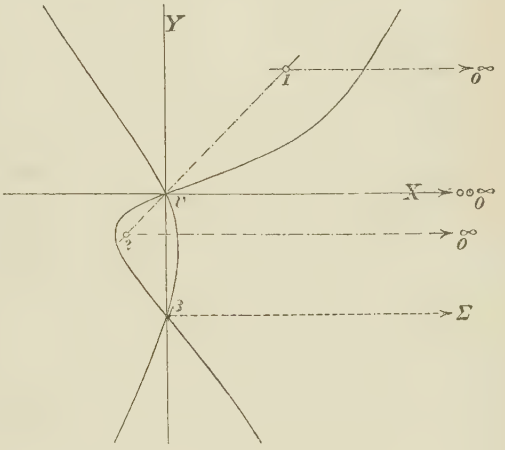


Fig. 25.

Die Vereinfachung der Bpk. von einer Kurve VI. Ordnung auf eine solche vierter Ordnung erklären wir uns daraus, daß wie im allgemeinen Falle (Nr. 9 oder 10) auf G^∞ die beiden Doppelpunkte J_1^* und J_2^* liegen müßten, dann weiter der vierfache Punkt 0^∞. Die G^∞ spaltet sich daher von der Kurve VI. Ordnung *doppelt zählend* ab, und es verbleibt noch eine Kurve IV. Ordnung. *Die Kurve geht durch keinen der beiden Kreispunkte J_1^* und J_2^* mehr hindurch.* Eine Betrachtung des höchsten Gleichungspolynoms lehrt noch weiter:

1) Solange P_1 und P_2 auf der *gleichen* Seite von $T=X$ liegen (d. h. a und b sind beide etwa positiv!), befinden sich auf G^∞ außer dem Doppelpunkte 0^∞ mit reellen Doppeltangenten $(\eta=\pm\sqrt{4ab})$ auch noch zwei konjugiert imaginäre einfach zählende Punkte (p^*, q^*).

2) Liegen P_1 und P_2 zu *verschiedenen* Seiten der Grundasymptote $T=X$, so liegen auf G^∞ außer dem Doppelpunkte 0^∞ mit imaginären Doppeltangenten auch noch zwei weitere reelle einfach zählende Punkte (p, q).

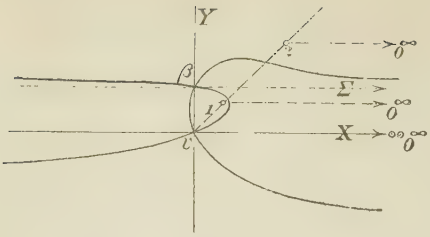


Fig. 26.

Nr. 14. P_1 und P_2 liegen zu *verschiedenen* Seiten von X. (Fig. 25.)

Koord: $P_1(3,3)$; $P_2(-1,-1)$; $P_3(\infty, 0)$; $P_4(\infty, 0)$.

Verb. Linie $P_3 P_4 \equiv X$.

Verlauf: Eine unikursale Kurve IV. Ordnung.

Doppelpunkte: v, β, 0^∞.

Auf G^∞: 0^∞, p, q (*keine* Parabelbrennpunkte!).

Nr. 15. P_1 und P_2 liegen auf der *gleichen Seite* von X. (Fig. 26.)

Koord.: $P_1(1, 1)$; $P_2(3, 3)$; $P_3(\infty, 0)$; $P_4(\infty, 0)$.

Verb. Linie $P_3 P_4 \equiv X$.

Verlauf: Eine unikursale Kurve IV. Ordnung.

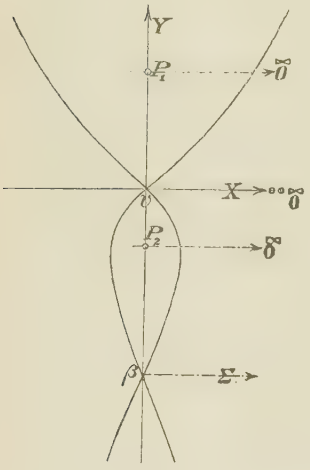


Fig. 27.

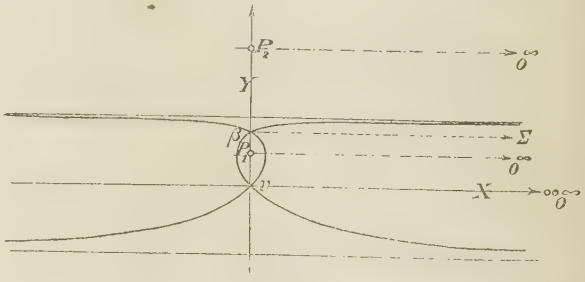


Fig. 28.

Doppelpunkte: v, β, 0^∞.

Auf G^∞: 0^∞, p^*, q^* (*keine* Parabelbrennpunkte!).

Zu 14. und 15. ist noch zu bemerken, daß die Bpk. *symmetrisch* zur Verbindungslinie $P_1 P_2$ wird, sobald $P_1 P_2$ senkrecht auf X steht. Vergleiche die Figuren 27 u. 28.

Nr. 16. Wird $a = b$, so entsteht das Büschel von Kegelschnitten, das durch eine feste Asymptote X und die Tangente $y = \varkappa x$ mit dem Berührpunkt: $y = 2a$ bestimmt ist. (Fig. 29.)

Dafür gibt die allgemeine Gleichung auf Seite 33 die bemerkenswerte Reduktion auf eine zirkulare Kurve III. Ordnung, indem sich die Gerade $y - 2a = 0$ von der Kurve abspaltet.

Man erhält als Gleichung der Bpk.:

$$\varkappa\eta(\xi^2 + \eta^2) + 2a\varkappa(\xi^2 - \eta^2) - 4a\xi\eta = 0.$$

Wird weiter in diesem Beispiel: $a = \infty$, so hätte man damit das Büschel aller Hyperbeln festgelegt, die die beiden Geraden $y = 0$ und

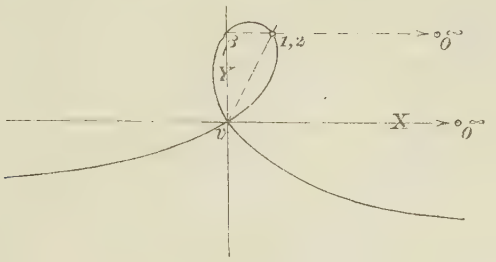


Fig. 29.

$y = \varkappa x$ zu Asymptoten haben. Die Gleichung der Bpk. wird: $\varkappa\xi^2 - 2\xi\eta - \varkappa\eta^2 = 0$, d. h. die Bpk. fällt mit den beiden Winkelhalbierenden der Asymptoten zusammen, was von vornherein klar ist.

Nr. 17. Wird in Nr. 15 $b = \infty$, so wird damit ein Kegelschnittbüschel definiert, das durch einen Grundpunkt ($y = \varkappa x$, $y = 2a$), eine Asymptote ($y = 0$) und eine Asymptotenrichtung ($y = \varkappa x$) näher bestimmt ist. (Fig. 30.) Die Gleichung der Bpk. zerfällt dann in zwei:

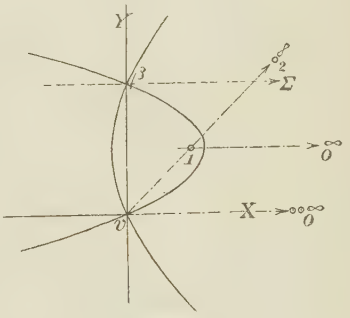


Fig. 30.

I. $\eta(\eta - 4a) = \frac{4a\xi}{\varkappa}\left(\sqrt{1+\varkappa^2} - 1\right)$,

II. $\eta(\eta - 4a) = \frac{4a\xi}{\varkappa}\left(-\sqrt{1+\varkappa^2} + 1\right)$.

Damit sind zwei *konfokale* Parabeln dargestellt, die beide durch v gehen und den Punkt P_1 als Brennpunkt haben. Ein mit diesem verwandtes Beispiel wird uns später in Nr. 25 begegnen.

D. Von den vier Grundpunkten des Büschels rücken drei unter Festlegung eines Krümmungskreises zusammen.

Die besonderen Büschel, bei denen alle Kegelschnitte in einem vorgegebenen Punkte $P(P_2 = P_3 = P_4)$ einen bestimmten Krümmungskreis vom Radius r besitzen und außerdem noch durch einen bestimmten Punkt P_1 gehen, lassen sich in der gleichen Weise behandeln wie die früheren Fälle.

Das Koordinatensystem werde so gelegt, daß P Anfangspunkt, die X-Achse Tangente an den Krümmungskreis und damit die Y-Achse

gemeinsame Normale aller Büschelkegelschnitte werde; die Koordinaten von P_1 seien $x_1 y_1$. (Fig. 31.)

Alle Kegelschnitte, die durch den Anfangspunkt gehen und dort die X-Achse berühren, haben die Gleichung:

$$a_{11}x^2 + 2\,a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2\,a_{23}y = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a_{11}x + a_{12}y}{a_{12}x + a_{22}y + a_{23}}$$

und

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=y=0} = -\frac{a_{11}}{a_{23}}.$$

Nun soll aber sein:

$$r = \left(\frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right)_{x=y=0},$$

woraus sich ergibt:

$$a_{23} = a_{11} \cdot r.$$

Also lautet die Gleichung aller Kegelschnitte, die im Anfangspunkt die X-Achse berühren und dort gleichzeitig den Krümmungsradius r haben,

(1) $$x^2 + 2\,ry + a_{22}y^2 + 2\,a_{12}xy = 0,$$

indem $a_{11} = 1$ gesetzt wurde. Damit jeder auch durch $P_1(x_1, y_1)$ gehe, muß weiter erfüllt sein:

(2) $$x_1^2 + 2\,ry_1 + a_{22}y_1^2 + 2\,a_{12}x_1y_1 = 0.$$

Durch Elimination von a_{22} aus (1) und (2) und die Substitution: $a_{12} = \lambda$ folgt als Gleichung des verlangten Kegelschnittbüschels:

$$\begin{vmatrix} x^2 + 2\,ry + 2\,\lambda xy, & y^2 \\ x_1^2 + 2\,ry_1 + 2\,\lambda x_1y_1, & y_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

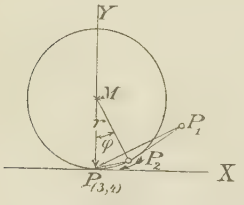


Fig. 31.

Darin kommen der Größe r zwei Vorzeichen zu, je nachdem der Krümmungskreis und P_1 auf derselben Seite von der X-Achse liegen oder nicht. Im ersten Fall ist r negativ, im zweiten positiv zu nehmen.

Interessant ist auch der Grenzübergang, der die Gleichung auf Seite 28 für das gegenwärtige Problem anwendbar macht.

Wenn sich nämlich der Punkt P_2 auf dem Kreise bleibend gegen die beiden unendlich nahen Punkte P_3 und P_4 bewegt, so können wir

dadurch einen Krümmungskreis festlegen, dessen Mittelpunkt M und dessen Radius r sei. (Fig. 31.)

Wir können zunächst die erwähnte Gleichung in folgende Form bringen:

(1) $$\varrho \cdot [(\varrho - \varrho_2) y_1 - (\varrho - \varrho_1) y_2] + \Delta \cdot \xi = 0.$$

Darin ist;

$$\varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}; \quad \varrho_1 = \sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2}; \quad \varrho_2 = \sqrt{(\xi - x_2)^2 + (\eta - y_2)^2}$$

und

$$\Delta = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Setzen wir:

$$x_2 = r \cdot \sin \varphi$$

und

$$y_2 = r - r \cdot \cos \varphi,$$

so müssen wir $\varrho - \varrho_2$, das für $\varphi = 0$ verschwindet, zunächst für sehr kleine Werte von φ in eine Potenzreihe entwickeln. Man überzeugt sich, daß die Entwicklung bis φ^2 fortgesetzt werden muß. Wir setzen daher: $\sin \varphi = \varphi$ und $\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$; dann wird:

$$\Delta = r\varphi \left(y_1 - \frac{\varphi \cdot x_1}{2} \right)$$

und

$$\varrho - \varrho_2 = \varrho \cdot \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2\varphi \cdot r}{\varrho^2} \left(\xi - \frac{\eta \cdot \varphi}{2} - \frac{r\varphi}{2} \right)} \right] = \frac{\varphi^2 r^2 \xi^2}{2\varrho^3} + \frac{\varphi \cdot r}{\varrho} \left[\xi - \frac{\eta\varphi}{2} - \frac{r\varphi}{2} \right].$$

Da $x_2 = r\varphi$ und $y_2 = \frac{r\varphi^2}{2}$ gesetzt werden kann, ergibt sich durch Einsetzen aller gefundenen Größen in Gleichung (1) und nachfolgenden Übergang zur Grenze: $\lim \varphi = 0$ als Gleichung der Bpk. folgende:

$$\varrho^3 \cdot (\varrho - \varrho_1) + \varrho^2 (\eta y_1 - \xi x_1) + r y_1 \eta^2 = 0.$$

Diese läßt sich rationalisieren, und man erhält dann:

$$0 = (\xi^2 + \eta^2)^2 \cdot [(\xi y_1 - \eta x_1)^2 + 2 r y_1 \eta^2] - 2(\xi^2 + \eta^2) \eta^2 r y_1 (\xi x_1 + \eta y_1) - y_1^2 r^2 \eta^4.$$

Die Bpk. unseres speziellen Büschels ist somit wieder eine *bizirkulare Kurve* VI. Ordnung, die ebenso gut, wie in Lit. C, unikursal sein muß. Im Anfangspunkt tritt abermals ein vierfacher Punkt auf, der als Doppelpunkt *achtfach* zu zählen ist. Zu den sechs Doppelpunkten, die dem gemäß Lit. C zu erwartenden vierfachen Punkt O äquivalent sind, gesellen sich die dort noch selbständig auftretenden Doppelpunkte v und β.

Nr. 18. Krümmungskreis und Punkt P_1 liegen zu *verschiedenen* Seiten von X. (Fig. 32.)

Koord.: $P_1(4, 2)$; $r = 3$.

Verlauf: Eine unikursale bizirkulare Kurve VI. Ordnung. Da die Parabeln des Büschels imaginär sind, verläuft die Bpk. ganz im Endlichen und zwar in *zwei elliptischen Zügen*, die sich im Anfangspunkt berühren. Die dort auftretende gemeinsame Tangente fällt mit X zusammen.

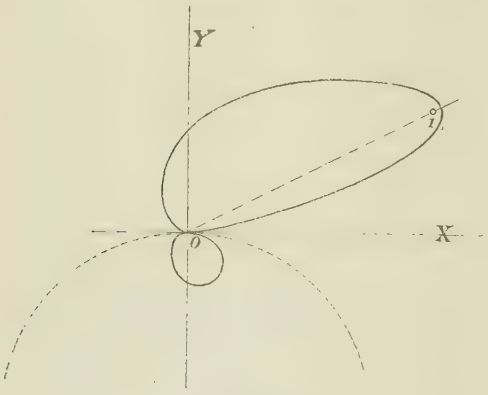


Fig. 32.

Auf G^∞: J_1^*, J_2^*, p^*, q^*.
Doppelpunkte: J_1^*, J_2^*.
Vierfacher Punkt O (= 8 Doppelpunkte).

Nr. 19. Krümmungskreis und Punkt P_1 liegen auf der *nämlichen* Seite von X. (Fig. 33.)

Koord.: $P_1(4, 2)$; $r = -3$.

Verlauf: Eine unikursale bizirkulare Kurve VI. Ordnung. Da die Büschelparabeln reell sind, verläuft die Bpk. in *einem elliptischen und einem hyperbolischen Ast*, die beide sich im Anfangspunkt berühren und dort X als gemeinsame Tangente besitzen.

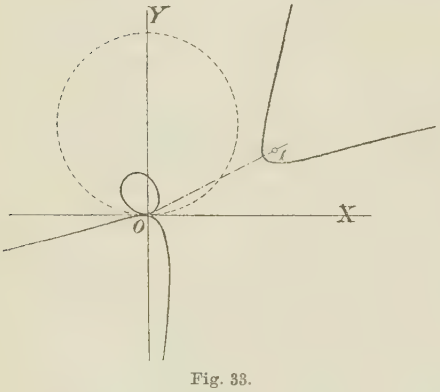


Fig. 33.

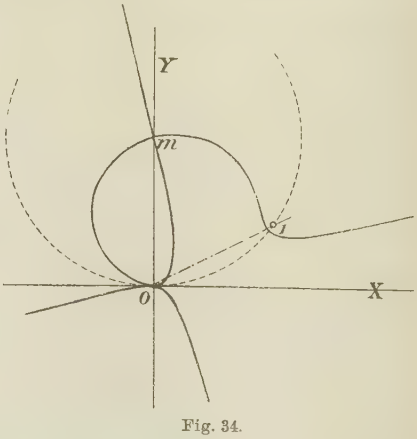


Fig. 34.

Auf G^∞: J_1^*, J_2^*, p, q.
Doppelpunkte: J_1^*, J_2^*.
Vierfacher Punkt O (= 8 Doppelpunkte).

Nr. 20. Wenn in Beispiel Nr. 19 der Punkt P_1 *auf dem Krümmungskreis* liegt (Fig. 34), so gehört dieser dem Büschel selbst an, und die Bpk. muß wie früher (Nr. 7 oder Nr. 12) in zwei zirkulare Kurven III. Ordnung zerfallen.

Koord.: $P_1(4, 2)$, $r = -5$.

Verlauf: Zwei unikursale Kurven dritter Ordnung (I und II), die beide im Anfangspunkt eine *reelle Spitze* besitzen. Die gemeinsame Spitzentangente fällt mit X zusammen.

Auf G^∞: I. J_1^*, J_2^*, p; II. J_1^*, J_2^*, q.

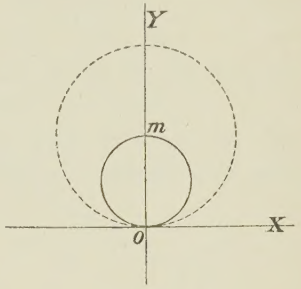


Fig. 35.

Nr. 21. Hier kann auch noch der sehr spezielle Fall Erwähnung finden, wo vier Punkte unter Festlegung eines *Oskulationskreises* zusammenrücken. (Fig. 35.) Dadurch ist das Büschel aller Kegelschnitte definiert, die sich im *Scheitel* oskulieren. Die Büschelgleichung sei:

$$(x^2 + y^2 - 2ry) + \lambda y^2 = 0.$$

Die Gleichung der Bpk. wird:

$$\xi^2 + \eta^2 - r\eta = 0.$$

Verlauf: Ein Kreis, der den Oskulationskreis im Anfangspunkt O berührt und den Radius $\frac{r}{2}$ besitzt.

Auf G^∞: J_1^*, J_2^*.

E. Je zwei Grundpunkte rücken unter Festlegung von zwei Grundtangenten samt Berührpunkt zusammen.

Dieser Fall ist sowohl als Büschel als auch als Schar von Kegelschnitten zu betrachten. Daher darf hier als Bpk. nur eine Kurve III. Ordnung erwartet werden.[1]) (Fig. 36.)

Nr. 22. Koord.: $P_1 \equiv P_3(2, 0)$; $P_2 \equiv P_4(0, 1)$.

Verbindungslinie $P_1P_3 \equiv X$,

„ $P_2P_4 \equiv Y$.

Verlauf: Eine unikursale, zirkulare Kurve III. Ordnung.

Doppelpunkt: v, d. i. der Schnittpunkt der beiden Grundtangenten.

Auf G^∞: J_1^*, J_2^*, p. Vgl. auch Nr. 16.

---

1) Vergl. Anmerkung 1, S. 4. Zu Nr. 24 ist zu bemerken, daß die Bpk. einer Kegelschnittschar in eine gleichseitige Hyperbel und die G^∞ zerfällt, wenn die vier Grundtangenten der Schar ein Parallelogramm bestimmen. Salmon-Fiedler, „Kegelschnitte", Bd. II. Leipzig 1888. S. 522.

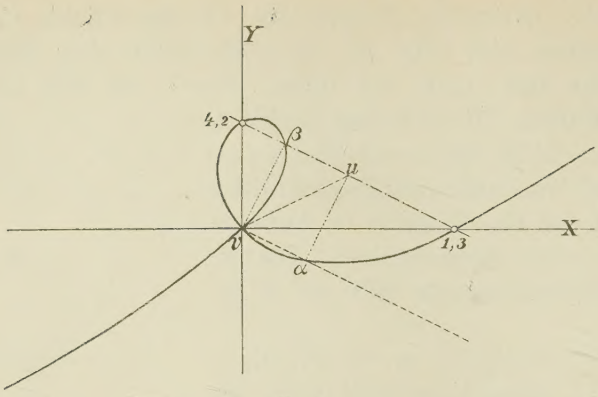


Fig. 36.

Nr. 23. Existiert unter den Individuen des vorigen Büschels auch ein *Kreis*, was dann eintrifft, wenn der Schnittpunkt der Tangenten mit den daraufliegenden Berührpunkten ein gleichschenkliges Dreieck bildet, so ergibt sich als Bpk. der durch die eben genannten Punkte bestimmte Kreis. (Fig. 37.) Als Kurve III. Ordnung hätte sie mit der Winkelhalbierenden X der Grundtangenten vier Punkte gemeinsam: 1) den Doppelpunkt v, 2) die beiden Brennpunkte der Büschelparabel. Daher die Zerfällung der Bpk. in eine zirkulare Kurve II. Ordnung: *den Kreis* und die genannte Gerade (X).

Auf G^∞: J_1^*, J_2^*.

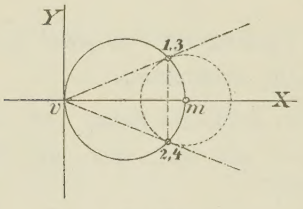


Fig. 37.

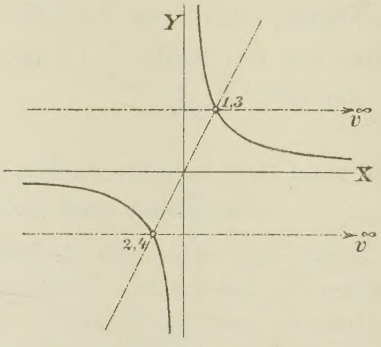


Fig. 38.

Nr. 24. Wenn in Nr. 22 die beiden Grundtangenten *parallel* werden (Fig. 38), so hätte die Bpk. auf G^∞: J_1^*, J_2^* als einfache Punkte und im Schnittpunkt der beiden Grundtangenten v^∞ einen Doppelpunkt. Daher die Zerfällung der zirkularen Kurve III. Ordnung in eine *nichtzirkulare* Kurve II. Ordnung: *eine gleichseitige Hyperbel* und in G^∞.

Büschel: $(y - \varkappa x)^2 + \lambda (y^2 - h^2) = 0$.

Gleichung der Bpk.: $\xi \cdot \eta = \frac{h^2}{\varkappa}$.

F. Von den vier Grundpunkten rücken zwei ins Unendliche.

Nr. 25. Rücken von den vier Grundpunkten des Büschels *zwei nach verschiedenen Richtungen in das Unendliche*[1]), so hat man damit ein Kegelschnittbüschel, dessen Individuen die beiden Richtungen $y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi$ und $y = x \cdot \operatorname{tg} \psi$ als Asymptotenrichtungen haben. (Fig. 39.)

Als Koordinaten nehmen wir: $P_1(a, 0)$; $P_2(-a, 0)$; $P_3(M, M \operatorname{tg} \varphi)$; $P_4(N, N \operatorname{tg} \psi)$; für $\lim M = \infty$ und $\lim N = \infty$.

Setzt man diese Werte in die Gleichung nach Möbius ein, berücksichtigt $\lim M$ und $\lim N = \infty$, und reduziert endlich den Ausdruck, so bekommt man als Bpk. *ein Paar konfokaler Kegelschnitte.*

$$\text{I.} \quad \varrho_1 + \varrho_2 = \frac{2a \cdot \sin\left(\frac{\varphi + \psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi - \varphi}{2}\right)}$$

$$\text{II.} \quad \varrho_1 - \varrho_2 = \frac{2a \cdot \cos\left(\frac{\varphi + \psi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\psi - \varphi}{2}\right)}.$$

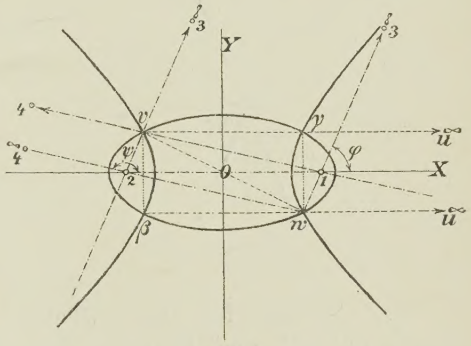


Fig. 39.

Die dadurch bestimmten zwei konfokalen Kegelschnitte, für welche augenscheinlich P_1 und P_2 die gemeinsamen Brennpunkte sind, durchschneiden sich gegenseitig in den vier Punkten v, w, β, γ, wobei diese genau die frühere Bedeutung haben. Die früheren Doppelpunkte J_1^*, J_2^*, u und α fallen auf G^∞, welcher Umstand bedingt, daß die Kurve VI. Ordnung in eine nicht zirkulare Kurve IV. Ordnung und die *doppelt* zählende G^∞ zerfällt. Eine Kurve IV. Ordnung kann aber nicht vier Doppelpunkte (v, w, β, γ) besitzen, daher zerfällt sie in zwei (konfokale) Kurven II. Ordnung.

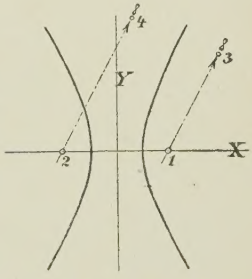


Fig. 40.

Die Figur zeigt recht hübsch unmittelbar einleuchtende Eigenschaften der Bpk. im allgemeinen.

Nr. 26. Wenn die beiden Richtungen $y = x \operatorname{tg} \varphi$ und $y = x \operatorname{tg} \psi$ *parallel* werden, d. h. wenn $\varphi = \psi$, dann hat man das Büschel aller

1) Dieser Fall unterscheidet sich wesentlich von dem auf Seite 32 ff., wo die Verbindungslinie der beiden unendlich fernen Grundpunkte die *im Endlichen* verlaufende Gerade $T = X$ ist. Hier fällt aber ihre Verbindungslinie mit der G^∞ zusammen.

Parabeln, die bei vorgegebener Achsenrichtung durch zwei Punkte P_1 und P_2 gehen. (Fig. 40.)

Die beiden Gleichungen sind dann:

I. $$\varrho_1 + \varrho_2 = \infty,$$

II. $$\varrho_1 - \varrho_2 = 2a \cdot \cos\varphi.$$

Die erste Kurve ist die G^∞, während die zweite eine Hyperbel darstellt, welche als Brennpunkte P_1 und P_2 und als Asymptotenrichtung die Richtung $y = x \cdot \operatorname{tg}\varphi$ besitzt.

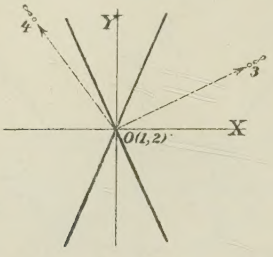


Fig. 41.

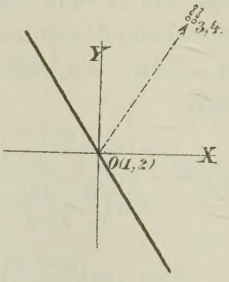


Fig. 42.

Nr. 25a. und Nr. 26a. Rücken in Nr. 25 und 26 die beiden Grundpunkte P_1 und P_2 unter Festlegung einer Grundtangente samt Berührpunkt zusammen, so degenerieren die dortigen Kegelschnitte in Gerade. (Fig. 41 u. 42.) Für $a = 0$ folgt: $\varrho_1 \pm \varrho_2 = 0$